Раздел I

МЕХАНИКА

Глава 1

Кинематика материальной точки

Основные законы и формулы

■ Средняя скорость материальной точки

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}; \qquad \langle v \rangle = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

[Δs — длина пути, пройденного точкой за промежуток времени Δt; x_1 и x_2 — координаты точки в моменты времени t_1 и t_2 соответственно].

■ Среднее ускорение материальной точки

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0}$$

[$\vec{v}$ и $\vec{v}_0$ — вектор скорости в данный t и начальный t_0 моменты времени соответственно].

■ Закон сложения скоростей в классической механике

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}$$

[$\vec{v}$ и $\vec{v}\,'$ — скорость материальной точки относительно неподвижной K и подвижной K' систем отсчета соответственно; $\vec{u}$ — скорость движения системы K' относительно системы K, направленная вдоль оси x].

■ Кинематическое уравнение равномерного движения материальной точки вдоль оси x

$$x = x_0 + v_x t$$

[x, x_0 — координата точки в данный t и начальный $t = 0$ моменты времени соответственно; v_x — проекция вектора скорости $\vec{v}$ на ось x].

■ Путь и скорость для равнопеременного движения

$$s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2};$$

$$v = v_0 \pm at$$

[v_0 — начальная скорость].

■ Связь между характеристиками движения с постоянным ускорением

$$v_2^2 - v_1^2 = 2as$$

[v_1 и v_2 — скорость в начале и конце участка пути s соответственно].

■ Полное ускорение при криволинейном движении

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

[$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ — тангенциальная составляющая ускорения; $a_n = \frac{v^2}{R}$ — нормальная составляющая ускорения (R — радиус кривизны траектории в данной точке)].

■ Угловая скорость и угловое ускорение

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t};$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

[$\Delta\varphi$ — угол поворота точки от начального положения; Δt — элементарный промежуток времени, в течение которого этот поворот произошел].

■ Частота вращения

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

[T — период вращения; ω — угловая скорость].

■ Угловая скорость для равномерного вращательного движения

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$$

[T — период вращения; $n = N/t$ — частота вращения (N — число оборотов, совершаемых телом за время t)].

■ Угол поворота и угловая скорость для равнопеременного вращательного движения

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2};$$

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$$

[ω_0 — начальная угловая скорость].

■ Связь между линейными и угловыми величинами

$$s = R\varphi; \ v = R\omega; \ a_\tau = R\varepsilon; \ a_n = \omega^2 R$$

[R — расстояние от точки до оси вращения].

Примеры решения задач

1 Поезд движется со скоростью $u = 30$ км/ч. Определите скорость v вертикально падающих капель дождя, если они скользят по стеклу вагона поезда со скоростью $v' = 12$ м/с, и угол наклона α к вертикали оставляемых на стекле следов капель.

Дано: $u = 30$ км/ч $= 8{,}33$ м/с; $v' = 12$ м/с.

Найти: v; α.

Решение. Согласно закону сложения скоростей в классической механике,

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u},$$

где $\vec{v}$ — скорость капель в системе координат K, связанной с Землей (эта система принимается неподвижной); $\vec{v}'$ — скорость капель относительно системы координат K', связанной с поездом (эта система движется со скоростью $\vec{u}$ в положительном направлении оси x системы K) (рис. 1).

Из прямоугольного треугольника (см. рис. 1) следует:

$$v^2 = v'^2 - u^2,$$

откуда искомая скорость

$$\boxed{v = \sqrt{v'^2 - u^2}}$$

Из формулы $\sin\alpha = \frac{u}{v'}$

угол наклона

$$\boxed{\alpha = \arcsin\frac{u}{v'}}$$

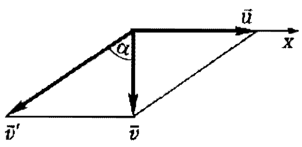


Рис. 1

Ответ: $v = 8{,}64$ м/с; $\alpha = 44^\circ$.

2 Велосипедист и пешеход преодолевают некоторое расстояние, двигаясь равномерно, причем велосипедист затрачивает на это в 5 раз меньше ($n = 5$) времени. Определите, на сколько скорость велосипедиста больше скорости пешехода Δv, если скорость пешехода $v_1 = 1$ м/с.

Дано: $t_1 = nt_2$; $n = 5$; $v_1 = 1$ м/с.

Найти: Δv.

Решение. Разность скоростей велосипедиста v_2 и пешехода v_1 равна

$$\Delta v = v_2 - v_1. \tag{1}$$

Путь, пройденный пешеходом и велосипедистом, одинаков, поэтому в случае равномерного движения

$$s = v_1 t_1 \text{ и } s = v_2 t_2,$$

или

$$v_1 t_1 = v_2 t_2,$$

откуда

$$v_2 = \frac{v_1 t_1}{t_2} = \frac{v_1 n t_2}{t_2} = n v_1 \tag{2}$$

(учли, что по условию задачи $t_1 = nt_2$).

Подставив формулу (2) в формулу (1), найдем искомую величину

$$\Delta v = n v_1 - v_1 = (n - 1) v_1.$$

$$\boxed{\Delta v = (n - 1) v_1}$$

Ответ: $\Delta v = 4$ м/с.

3 На рис. 2, a представлена зависимость ускорения a от времени t для тела, движущегося прямолинейно. В начальный момент времени ($t_0 = 0$) скорость тела $v_0 = 0$. Нарисуйте графики зависимостей скорости v и координаты x от времени t, описав движение на каждом из этапов.

Решение. I этап. $0 < t < t_1$ ($t_1 = 1$ с).

Начальные условия: $t_0 = 0$; $v_0 = 0$; $x_0 = 0$.

Скорость: $v_1 = v_0 + at = 2t$ (м/с), где $v_0 = 0$; $a = 2$ м/с^2.

При $t = t_1$ скорость $v_1 = 2$ м/с; график движения — прямая (см. рис. 2, *б*).

Согласно рис. 2, a, *б*, движение равноускоренное ($a_1 > 0$, $v > 0$).

Координата:

$$x_1 = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} = \frac{at^2}{2},$$

где $x_0 = 0$; $v_0 = 0$; $a = 2$ м/с^2; $x_1 =$ $= 1$ м — график движения — парабола, верви которой направлены вверх (рис. 2, *в*).

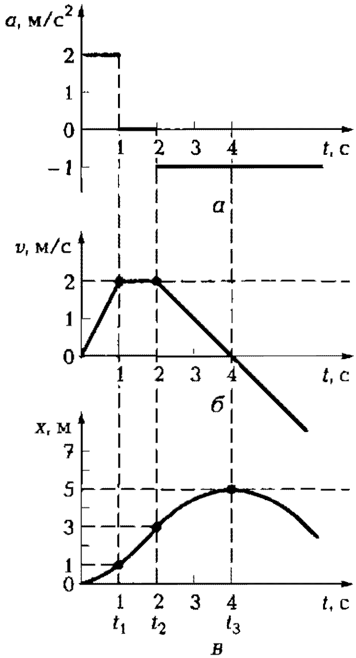


Рис. 2

II этап. $t_1 < t < t_2$ ($t_1 = 1$ с; $t_2 = 2$ с).

Начальные условия: $t_1 = 1$ с; $v_1 =$ $= 2$ м/с; $x_1 = 1$ м.

Скорость: $v_2 = v_1 = 2$ м/с; график движения — прямая (рис. 2, *б*).

Согласно рис. 2, *а*, движение равномерное ($a_2 = 0$).

Координата: $x_2 = x_1 + v_1(t - t_1)$, $x_2 = 3$ м; график движения — прямая (рис. 2, *в*).

III этап. $t > t_2$ ($t_2 = 2$ с).

Начальные условия: $t_2 = 2$ с; $v_2 =$ $= 2$ м/с; $x_2 = 3$ м.

Скорость: $v_3 = v_2 - a(t - t_2)$.

В момент времени $t_3 = 4$ с скорость $v_3 = 0$; затем скорость меняет знак (тело начинает движение в обратную сторону), при этом направления скорости и ускорения совпадают — движение равноускоренное (рис. 2, *б*).

Согласно рис. 2, *а*, *б*, движение равнозамедленное от $t_2 = 2$ с до $t_3 = 4$ с ($v > 0$, $a < 0$). При $t > t_3$ движение становится равноускоренным, поскольку знаки скорости и ускорения совпадают (скорость возрастает по модулю).

Координата:

$$x_3 = x_2 + v_2(t - t_2) + \frac{a_3(t - t_2)^2}{2}.$$

График движения — парабола, ветви которой направлены вниз. При $t_3 = 4$ с (точка поворота) координата достигает максимального значения ($x = x_{max}$). Этому моменту соответствует вершина параболы, $x_3 = 5$ м (рис. 2, *в*).

4 Кинематическое уравнение движения материальной точки имеет вид $x = 6 - 3t + 2t^2$ (м). Определите координату x_1, в которой скорость точки обращается в нуль.

Дано: $x = 6 - 3t + 2t^2$ (м); $v_1 = 0$.

Найти: x_1.

Решение. Кинематическое уравнение движения

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \qquad (1)$$

Сравнивая уравнение (1) с заданным уравнением

$$x = 6 - 3t + 2t^2 \text{ (м)}, \qquad (2)$$

находим начальную скорость и ускорение материальной точки

$$v_0 = -3 \text{ м/с}; \ a = 2 \text{ м/с}^2.$$

Скорость в случае равноускоренного движения

$$v = v_0 + at. \qquad (3)$$

Скорость v станет равной нулю через промежуток времени t_1, который определим из условия (3)

$$0 = -3 + 2t_1,$$

откуда $t_1 = 0{,}75$ с. Подставив это значение в уравнение (2), найдем искомую координату

$$x_1 = 6 - 3 \cdot 0{,}75 + 2 \cdot 0{,}75^2 = 4{,}86 \text{ (м)}.$$

Ответ: $x_1 = 4{,}86$ м.

5 На рис. 3, *а* представлен график зависимости ускорения a от времени t для тела, движущегося прямолинейно. В начальный момент времени $t_0 = 0$ скорость тела $v_0 = 0$. Определите среднюю скорость тела на всем пути и на каждом этапе движения; постройте графики зависимости скорости v и координаты x от времени t.

Решение. **I этап.** $t_0 < t < t_1$ ($t_0 = 0$, $t_1 = 3$ с).

Начальные условия: $t_0 = 0$, $v_0 = 0$, $x_0 = 0$.

Скорость: $v_1 = v_0 + a_1 t = a_1 t$, $v_1 = 6$ (м/с) (рис. 3, *б*).

Движение равноускоренное, так как скорость по модулю возрастает ($a_1 = 2$ м/с$^2 > 0$, $v > 0$).

Координаты:

$$x_1 = x_0 + v_0 t + \frac{a_1 t^2}{2} = \frac{a_1 t^2}{2}$$

(рис. 3, *в*),

$$x_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2} = \frac{2 \cdot 3^2}{2} = 9 \text{ м}.$$

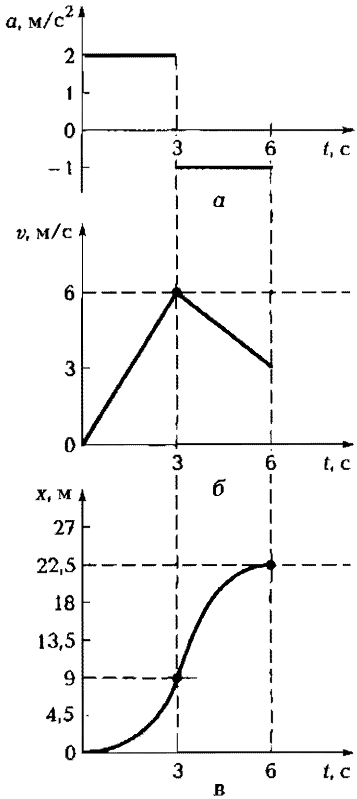


Рис. 3

Средняя скорость:

$$\langle v_1 \rangle = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{9 - 0[\text{м}]}{3 - 0[\text{с}]} = 3 \text{ м/с}.$$

II этап. $t_1 < t < t_2$ ($t_1 = 3$ с, $t_2 = 6$ с).

Начальные условия: $t_1 = 3$ с, $v_1 =$ $= 6$ м/с, $x_1 = 9$ м.

Скорость: $v_2 = v_1 + a_2(t - t_1) =$ $= 6 - (t - 3)$ (рис. 3.6, *б*).

Движение равнозамедленное, поскольку знаки скорости и ускорения различны ($a_2 = -1$ м/с$^2 < 0$, $v > 0$).

Координаты:

$$x_2 = x_1 + v_1(t - t_1) + \frac{a_2(t - t_1)^2}{2} =$$

$$= 9 + 6(t - 3) - \frac{1(t - 3)^2}{2} =$$

$$= 9 + 6(6 - 3) - \frac{1(6 - 3)^2}{2} = 22{,}5 \text{ м}$$

(рис. 3, *в*).

Средняя скорость:

$$\langle v_2 \rangle = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{22{,}5 - 9[\text{м}]}{6 - 3[\text{с}]} = 4{,}5 \text{ м/с}.$$

Средняя скорость на всем пути:

$$\langle v \rangle = \frac{x_2 - x_0}{t_2 - t_0} = 3{,}75 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\langle v_1 \rangle = 3$ м/с; $\langle v_2 \rangle = 4{,}5$ м/с; $\langle v \rangle = 3{,}75$ м/с.

6 Одно из тел бросили с высоты $h_1 = 12$ м вертикально вверх, другое в тот же момент с высоты $h_2 = 25$ м бросили горизонтально (рис. 4). Определите начальную скорость v_{01} первого тела, если оба тела упали на землю одновременно.

Дано: $h_1 = 12$ м; $h_2 = 25$ м; $t_1 = t_2 = t$.

Найти: v_{01}.

Решение. Кинематическое уравнение движения тела в векторной форме

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2},$$

где $\vec{r}_0$ — радиус-вектор, определяющий начальное положение тела в выбранной системе координат; $\vec{v}_0$ — начальная скорость тела; $\vec{g}$ — ускорение свободного падения.

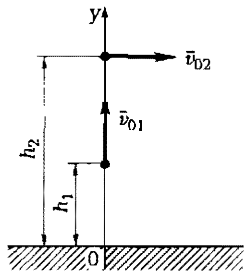


Рис. 4

Направив ось y вертикально вверх (начало отсчета на уровне земли, см. рис. 4), запишем уравнение движения первого и второго тел в проекции на эту ось для момента падения

$$0 = h_1 + v_{01}t - \frac{gt^2}{2}; \qquad (1)$$

$$0 = h_2 - \frac{gt^2}{2} \qquad (2)$$

(учли, что $t_1 = t_2 = t$).

Из уравнений (1) и (2) находим искомую начальную скорость первого тела

$$\boxed{v_{01} = \frac{h_2 - h_1}{\sqrt{2h_2/g}}}$$

Ответ: $v_{01} = 5{,}76$ м/с.

7 С вершины наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$, горизонтально брошен камень со скоростью $v_0 = 5$ м/с (рис. 5). Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите расстояние до точки падения камня на наклонную плоскость.

Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_0 = 5$ м/с.

Найти: l.

Решение. Запишем кинематические уравнения движения в векторной форме

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2};$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t^2;$$

$$\vec{a} = \vec{g},$$

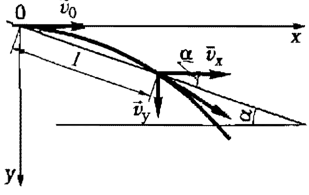


Рис. 5

где $\vec{r}_0$ — радиус-вектор, определяющий начальное положение тела; $\vec{v}_0$ — начальная скорость тела; $\vec{g}$ — ускорение свободного падения.

Направив оси координат из точки начала движения (см. рис. 5), запишем уравнения движения в проекции на оси x и y:

$$x = v_0 t; \quad y = \frac{gt^2}{2}, \tag{1}$$

$$v_x = v_0; \; v_y = gt. \tag{2}$$

Обозначив координаты точки наклонной плоскости, в которую упадет камень, через x_1 и y_1, время падения — через t_1, имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1}{x_1}, \tag{3}$$

причем, согласно (1), $x_1 = v_0 t_1$ и $y_1 = \frac{gt_1^2}{2}$. Подставив эти выражения в формулу (3), найдем

$$t_1 = \frac{2v_0 \operatorname{tg}\alpha}{g}. \tag{4}$$

Искомое выражение, определяющее расстояние до точки падения камня на наклонную плоскость, имеет вид

$$l = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_1^2 + x_1^2 \operatorname{tg}^2\alpha} = x_1\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} =$$

$$= \frac{2v_0^2 \operatorname{tg}\alpha}{g}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2v_0^2 \operatorname{tg}\alpha}{g\cos\alpha}$$

[учли соотношения (3), (1) и (4)].

$$\boxed{l = \frac{2v_0^2 \operatorname{tg}\alpha}{g\cos\alpha}}$$

Ответ: $l = 17{,}7$ м.

8 Тело брошено под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите этот угол, если максимальная высота подъема $h_{\max}$ в $n = 2{,}1$ раза меньше дальности полета (рис. 6).

Дано: $h_{\max} = \frac{s}{n}$; $n = 2{,}1$.

Найти: α.

Решение. Направив оси координат (см. рис. 6) из точки начала движения ($\vec{r}_0 = 0$), запишем уравнения движения в проекциях на оси x и y

$$x = v_{0x}t, \; v_x = v_{0x}, \; a_x = 0; \tag{1}$$

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \; v_y = v_{0y} - gt, \; a_y = g. \tag{2}$$

Из рис. 6 следует, что

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha; \; v_{0y} = v_0 \sin\alpha. \quad (3)$$

Так как при $y = h_{max}$ (в высшей точке траектории) $v_y = 0$, то из второго соотношения (2) находим время подъема

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g}. \quad (4)$$

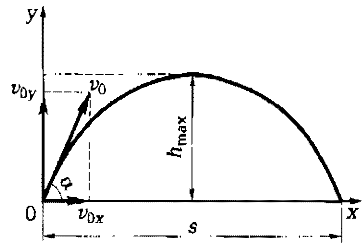


Рис. 6

Подставив формулу (4) в первое из соотношений (2), найдем максимальную высоту подъема

$$h_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}. \quad (5)$$

В момент падения тела $y(t) = 0$, поэтому общее время движения определим из первого соотношения (2)

$$t = \frac{2v_{0y}}{g}.$$

Из первого соотношения (1), используя (4), находим дальность полета

$$s = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}. \quad (6)$$

Разделив (5) на (6) и учитывая (3), имеем

$$\frac{h_{max}}{s} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{4}. \quad (7)$$

Согласно условию задачи, $h_{max} = s/n$, поэтому из выражения (7) имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = 4/n,$$

откуда искомый угол

$$\boxed{\alpha = \operatorname{arctg}(4/n)}$$

Ответ: $\alpha = 62{,}3^\circ$.

9 *[1] Материальная точка начинает вращаться с постоянным угловым ускорением. Определите угловое ускорение ε точки, если через промежуток времени $t = 6$ с угол α между векторами полного ускорения $\vec{a}$ и скорости $\vec{v}$ составляет 55° (рис. 7).

[1] Здесь и далее по тексту задачи повышенной сложности и требующие применения производных отмечены звездочкой.

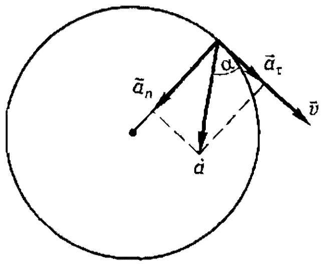


Рис. 7

Дано: $\varepsilon = \text{const}$; $t = 6$ с; $\alpha = 55^\circ$.

Найти: ε.

Решение. При равноускоренном вращательном движении угловая скорость ω связана с ускорением соотношением $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$. Согласно условию $\omega_0 = 0$, поэтому

$$\omega = \varepsilon t. \quad (1)$$

Запишем уравнение, связывающее тангенциальную составляющую ускорения a_τ, направленную вдоль вектора скорости (см. рис. 7), с угловым ускорением

$$a_\tau = \varepsilon R, \quad (2)$$

где R — радиус окружности, по которой движется материальная точка.

Нормальная составляющая ускорения (направлена к центру окружности):

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (3)$$

Из рис. 7 следует, что $\operatorname{tg}\alpha = a_n / a_\tau$. Подставив (2) и (3) в последнее выражение, учитывая соотношение $v = \omega R$, имеем $\operatorname{tg}\alpha = \varepsilon t^2$, откуда искомое угловое ускорение

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{t^2}}$$

Ответ: $\varepsilon = 0{,}04$ рад/с^2.

10* Скорость автомобиля, движущегося равнозамедленно, за время $\Delta t = 2{,}5$ с уменьшилась от $v_1 = 54$ км/ч до $v_2 = 36$ км/ч. Определите угловое ускорение ε и число полных оборотов N колес за это время, если их радиус $R = 40$ см.

Дано: $\Delta t = 2{,}5$ с; $v_1 = 54$ км/ч $= 15$ м/с; $v_2 = 36$ км/ч $= 10$ м/с; $R = 40$ см $= 0{,}4$ м.

Найти: ε, N.

Решение. Угловое ускорение (при равнозамедленном движении оно отрицательно)

$$\varepsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} < 0, \quad (1)$$

где ω_1 и ω_2 — угловая скорость в моменты времени t_1 и t_2.

Учитывая связь между линейной и угловой скоростями $v_1 = \omega_1 R$ и $v_2 = \omega_2 R$, из выражения (1) найдем искомое угловое ускорение

$$\boxed{\varepsilon = \frac{v_2 - v_1}{R\Delta t}} \qquad (2)$$

Число оборотов при торможении

$$N = \frac{\varphi}{2\pi}, \qquad (3)$$

где угол поворота в случае равнозамедленного вращательного движения

$$\varphi = \omega_1 \Delta t - \frac{\varepsilon(\Delta t)^2}{2},$$

откуда, учитывая формулу (2) и отрицательное значение ε, находим

$$\varphi = \frac{v_1 + v_2}{2R}\Delta t. \qquad (4)$$

Подставив выражение (4) в формулу (3), определяем искомое число оборотов

$$\boxed{N = \frac{v_1 + v_2}{4\pi R}\Delta t}$$

Ответ: $\varepsilon = -5$ рад/с^2; $N = 12$.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Автомобиль начал движение по прямому участку шоссе со скоростью $v_1 = 50$ км/ч. Через время $\Delta t = 0{,}5$ ч в том же направлении выехал другой автомобиль со скоростью $v_2 = 70$ км/ч. Определите, через какое время t_2 второй автомобиль догонит первый и какое расстояние s_2 проедет до встречи. ***Ответ***: $t_2 = 1{,}25$ ч; $s_2 = 87{,}5$ км.

1.2. Первые 200 км (s_1) пути по прямому участку шоссе автомобиль двигался со скоростью $v_1 = 60$ км/ч, а оставшиеся 100 км (s_2) — со скоростью $v_2 = 70$ км/ч. Определите среднюю скорость $\langle v \rangle$ автомобиля на всем пути. ***Ответ***: $\langle v \rangle = 63$ км/ч.

1.3. Автомобиль проехал $s = 300$ км за $t = 5$ ч, причем первую треть пути он ехал со скоростью $v_1 = 50$ км/ч, после чего стоял ($v_2 = 0$), а оставшийся путь преодолел со скоростью $v_3 = 80$ км/ч. Определите продолжительность t_2 остановки. ***Ответ***: $t_2 = 30$ мин.

1.4. Мальчик проехал первую половину пути на велосипеде со скоростью $v_1 = 6$ км/ч. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью $v_2 = 12$ км/ч, а затем до конца пути шел пешком со скоростью $v_3 = 4$ км/ч. Найдите среднюю скорость $\langle v \rangle$ движения мальчика на всем пути, считая движение прямолинейным. ***Ответ:*** $\langle v \rangle = 6{,}86$ км/ч.

1.5. Из двух населенных пунктов, соединенных прямой дорогой, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Скорость первого $v_1 = 45$ км/ч, и до встречи он проехал $s_1 = 0{,}4$ всего пути. Определите скорость v_2 второго автомобиля. ***Ответ:*** $v_2 = 67{,}5$ км/ч.

1.6. Велосипедист и пешеход, начиная двигаться одновременно и равномерно, преодолевают некоторое расстояние, причем велосипедист достигает цели на $\Delta t = 1$ ч 20 мин раньше. Определите скорость велосипедиста v_1, если скорость пешехода $v_2 = 4$ км/ч и он был в пути $t_2 = 3{,}5$ ч. ***Ответ:*** $v_1 = 6{,}46$ км/ч.

1.7. Человек идет по эскалатору в направлении его движения. Определите скорость v' человека относительно эскалатора, если скорость человека относительно стен $v = 2{,}5$ м/с, а скорость движения эскалатора $u = 1{,}2$ км/ч. ***Ответ:*** $v' = 2{,}17$ м/с.

1.8. Плот сплавляют вниз по течению реки. Человек идет на плоту с одного его конца на другой перпендикулярно движению со скоростью относительно плота $v' = 3$ км/ч (рис. 8). Определите скорость v человека в системе отсчета, связанной с берегом, если скорость течения реки $u = 0{,}6$ м/с. ***Ответ:*** $v = 1{,}03$ м/с.

1.9. Стараясь равномерно грести перпендикулярно течению ($v' = \text{const}$), пловец переплывает реку шириной $b = 20$ м за $t = 5$ мин. Какова скорость течения реки u, если пловец проделал путь $s = 50$ м? ***Ответ:*** $u = 0{,}153$ м/с.

1.10. Скорость течения реки $u = 0{,}2$ м/с. Какова скорость лодки относительно воды v', если лодка переплыла реку шириной $b = 25$ м по прямой перпендикулярно берегу за $t = 2{,}5$ мин? ***Ответ:*** $v' = 0{,}26$ м/с.

1.11. Определите начальную v_0 и конечную v скорости мотоцикла, если он, двигаясь с постоянным ускорением $a = 0{,}1$ м/с^2, за время $t = 5$ мин преодолел расстояние $s = 6$ км. ***Ответ:*** $v_0 = 5$ м/с; $v = 35$ м/с.

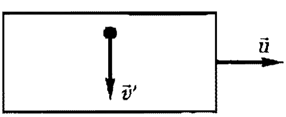


Рис. 8

1.12. По графику зависимости скорости v от времени t для точки, движущейся прямолинейно (рис. 9), определите среднее ускорение $\langle a \rangle$, расстояние s, пройден-

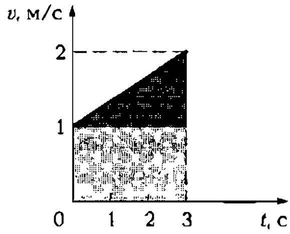


Рис. 9

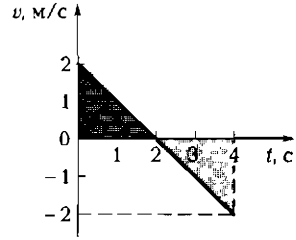


Рис. 10

ное точкой, и среднюю скорость $\langle v \rangle$ за время $t = 3$ с. ***Ответ***: $\langle a \rangle =$ $= 0{,}333$ м/с; $s = 4{,}5$ м; $\langle v \rangle = 1$ м/с.

1.13. На рис. 10 представлен график зависимости скорости v от времени t для материальной точки, движущейся прямолинейно. По графику определите путь s_1, пройденный за первые две секунды движения, и путь s_2 за первые четыре секунды движения. ***Ответ***: $s_1 = 2$ м; $s_2 = 4$ м.

1.14. По графику зависимости координаты x прямолинейного движения тела от времени t (рис. 11) постройте графики зависимостей скорости v и ускорения a от времени t. Определите среднюю скорость $\langle v \rangle$: 1) за первую секунду; 2) за четыре секунды движения. ***Ответ***: 1) $\langle v \rangle = -3$ м/с; 2) $\langle v \rangle = -1{,}13$ м/с.

1.15. По графику зависимости скорости v от времени t для материальной точки, движущейся прямолинейно (рис. 12), определите среднюю скорость $\langle v \rangle$: 1) за время от $t = 0$ до $t_1 = 3$ с; 2) за время от $t = 0$ до $t_2 = 5$ с. Задачу решите графическим методом. ***Ответ***: 1) $\langle v \rangle = 1$ м/с; 2) $\langle v \rangle = 0{,}8$ м/с.

1.16. Определите ускорение a тела, если на пути $s = 200$ м его скорость: 1) увеличилась от $v_1 = 18$ м/с до $v_2 = 32$ м/с; 2) уменьшилась от $v_1 = 40$ м/с до $v_2 = 28$ м/с. Движение считать прямо-

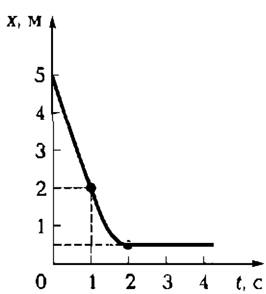
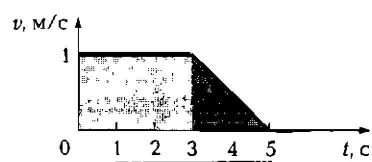


Рис. 11



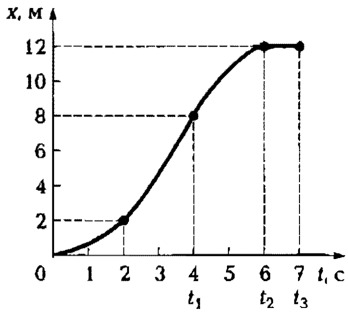


Рис. 13

линейным с постоянным ускорением. ***Ответ***: 1) $a = 1{,}75$ м/с^2; 2) $a = 2{,}04$ м/с^2.

1.17. На рис. 13 представлен график зависимости координаты x от времени t для тела, движущегося прямолинейно. В начальный момент времени $t = 0$ скорость тела $v_0 = 0$. Определите ускорение a и среднюю скорость $\langle v \rangle$ тела: 1) за первые четыре секунды; 2) за промежуток от четырех до шести секунд; 3) за семь секунд. ***Ответ***: 1) $a_1 = 1$ м/с^2, $\langle v_1 \rangle = 2$ м/с; 2) $a_2 = 2$ м/с^2, $\langle v_2 \rangle = 2$ м/с; 3) $\langle a \rangle = 0$; $\langle v \rangle = 1{,}71$ м/с.

1.18. Опишите характер прямолинейного движения тела, представленного на графике в виде зависимости скорости v от времени t (рис. 14). Используя кинематические соотношения, рассчитайте, чему равен путь: 1) за первую секунду движения; 2) за первые две секунды движения; 3) за три секунды движения; 4) за четыре секунды движения. Постройте график зависимости координаты x от времени t. ***Ответ***: 1) $s_1 = 2$ м; 2) $s_2 = 4{,}5$ м; 3) $s_3 = 6$ м; 4) $s_4 = 6$ м.

1.19. Опишите характер прямолинейного движения тела, представленного на графике в виде зависимости координаты x от времени t (рис. 15). Начальная скорость $v_0 = 0$. Постройте графики зависимости скорости v от времени t. Определите среднюю скорость $\langle v \rangle$ за промежуток времени: 1) от одной до двух секунд движения; 2) от двух до трех секунд движения; 3) от трех до пяти секунд движения; 4) за пять секунд движения. ***Ответ***: 1) $\langle v_1 \rangle = 1$ м/с; 2) $\langle v_2 \rangle = 2$ м/с; 3) $\langle v_3 \rangle = -1{,}5$ м/с; 4) $\langle v_4 \rangle = 0$.

1.20. Постройте графики зависимости скорости v и координаты x от времени t для материальной точки, движущейся прямолинейно, если за время от нуля до первой секунды точка

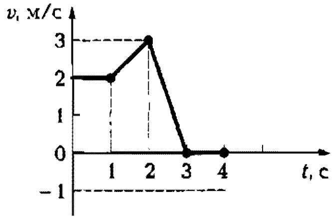


Рис. 14

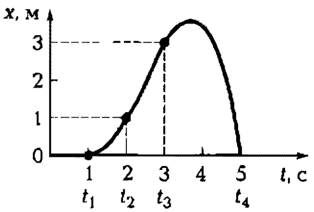


Рис. 15

двигалась равномерно ($a_1 = 0$); за время от одной до двух секунд ускорение $a_2 = 5$ м/с^2; за время от двух до четырех секунд ускорение $a_3 = -5$ м/с^2. Начальная скорость $\upsilon_0 = 0$.

1.21. Постройте графики зависимости скорости υ и координаты x от времени t для материальной точки, движущейся прямолинейно, если за время от нуля до первой секунды точка двигалась равноускоренно ($a_1 = 1$ м/с^2); за время от первой до второй секунды ускорение $a_2 = -0,5$ м/с^2; за время от второй до третьей секунды ускорение $a_3 = 0$ м/с^2. Начальная скорость $\upsilon_0 = 0$.

1.22. От поезда, движущегося со скоростью $\upsilon = 72$ км/ч, отцепляют последний вагон, который останавливается через время $t = 10$ с. Определите расстояние s между поездом и вагоном в этот момент. Движение вагона считать равнозамедленным. ***Ответ:*** $s = 100$ м.

1.23. Определите начальную υ_0 и конечную υ скорости мотоцикла, если он, двигаясь с постоянным ускорением $a = 0,1$ м/с^2, за время $t = 5$ мин преодолел расстояние $s = 6$ км. ***Ответ:*** $\upsilon_0 = 5$ м/с; $\upsilon = 35$ м/с.

1.24. Тело, двигаясь равноускоренно и прямолинейно, за время $t = 20$ с проходит путь $s = 120$ м, а за время $t_2 = 28$ с — путь $s_2 = 300$ м. Определите начальную скорость υ_0 и ускорение a тела. ***Ответ:*** $\upsilon_0 = 5,79$ м/с; $a = 1,18$ м/с^2.

1.25. Тело начинает двигаться прямолинейно и равномерно со скоростью $\upsilon_1 = 2$ м/с, в момент времени $t_1 = 48$ с оно приобрело ускорение по направлению движения $a = 0,8$ м/с^2 и двигалось еще в течение $t_2 = 1$ мин. Определите суммарное расстояние s, пройденное телом. ***Ответ:*** $s = 1,66$ км.

1.26. Из одного и того же места с разницей во времени $t_1 = 2$ мин начали двигаться прямолинейно два тела — первое тело равномерно, второе без начальной скорости, но с ускорением $a = 0,5$ м/с^2. Определите скорость υ_1 первого тела, если второе тело догоняет его через $t_2 = 5$ мин. ***Ответ:*** $\upsilon_1 = 53,6$ м/с.

1.27. Запишите кинематические уравнения прямолинейного движения материальной точки, учитывая, что ее начальная скорость $\upsilon_0 = 5$ м/с, ускорение $a = -1,4$ м/с^2. Определите расстояние s, пройденное телом до изменения направления движения на противоположное. Начало координат поместите в точку начала движения. ***Ответ:*** $s = 8,93$ м.

1.28. Кинематическое уравнение зависимости скорости движения материальной точки от времени имеет следующий вид: $\upsilon = (10 + 4t)$, м/с. Определите, в какой момент времени t_1 координата точки $x_1 = 90$ м. ***Ответ:*** $t_1 = 4,66$ с.

1.29. Кинематическое уравнение прямолинейного движения материальной точки имеет вид $x = (6t - 2t^2)$, м. Определите момент времени t_1, когда точка вернется в исходное положение ($x_1 = 0$). Чему равна скорость υ_1 точки в этот момент времени? ***Ответ***: $t_1 = 3$ с; $\upsilon_1 = -6$ м/с.

1.30. Кинематическое уравнение движения материальной точки для координаты имеет вид $x = (8 + 3t + 5t^2)$, м. Определите координату x_1 и скорость υ_1 материальной точки через $t_1 = 5$ с движения. ***Ответ***: $x_1 = 148$ м; $\upsilon_1 = 53$ м/с.

1.31. Запишите кинематическое уравнение зависимости координаты от времени $x(t)$ для каждого этапа прямолинейного движения материальной точки, если график зависимости скорости υ от времени t имеет вид, представленный на рис. 16. ***Ответ***: $x = (t^2 + t)$, м; $x = (5t - 4)$, м.

1.32. Кинематическое уравнение движения материальной точки для координаты имеет вид $x = (4 + 5t + 1{,}5t^2)$, м. Определите скорость υ_1 материальной точки в момент времени, когда ее координата $x_1 = 20$ м. ***Ответ***: $\upsilon_1 = 11$ м/с.

1.33. Прямолинейное движение двух материальных точек описывается кинематическими уравнениями $x_1 = (3 + 5t)$, м, и $x_2 = (15 + 3t - 2t^2)$, м. В какой момент времени $t_в$ после начала движения материальные точки встретятся? Чему будут равны их скорости $\upsilon_{1в}$ и $\upsilon_{2в}$ в момент встречи? ***Ответ***: $t_в = 2$ с; $\upsilon_{1в} = 5$ м/с; $\upsilon_{2в} = -5$ м/с.

1.34. Тело начинает свободное падение с высоты $H = 500$ м без начальной скорости. Какую часть пути тело пройдет: 1) за четвертую секунду движения; 2) за десятую секунду движения? Сопротивлением воздуха пренебречь. ***Ответ***: 1) $\frac{h_1}{H} = 6{,}86 \cdot 10^{-2}$; 2) $\frac{h_2}{H} = 18{,}6 \cdot 10^{-2}$.

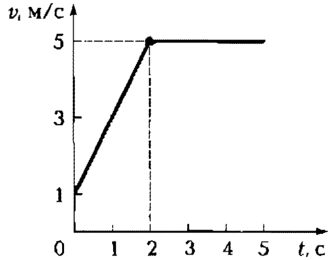


Рис. 16

1.35. Во сколько раз быстрее свободно падающее тело пройдет вторую половину пути, чем первую, если начальная скорость тела равна нулю? Сопротивлением воздуха пренебречь. ***Ответ***: $t_1/t_2 = 2{,}42$.

1.36. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, какое время свободно падающее тело затратит на прохождение: 1) первой трети пути; 2) последней трети пути? Начальную скорость принять равной нулю. ***Ответ***: 1) $t_1 = \sqrt{\frac{2H}{3g}}$ [с]; 2) $t' = \left(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{4}{3}}\right)\sqrt{\frac{H}{g}}$ [с].

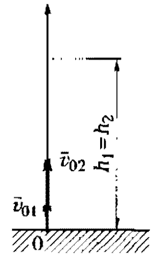


Рис. 17

1.37. Тело падает с высоты $H = 400$ м с нулевой начальной скоростью. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, какое время потребуется для прохождения телом: 1) первых 100 м пути; 2) последних 100 м пути. ***Ответ***: 1) $t_1 = 4{,}52$ с; 2) $t_2 = 1{,}21$ с.

1.38. Первое тело подбросили вертикально вверх с начальной скоростью $v_{01} = 50$ м/с, через $t_1 = 2$ с второе тело подбросили со скоростью $v_{02} = 70$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, через какое время t тела окажутся на одной высоте (рис. 17). Чему равна эта высота h_1? ***Ответ***: $t = 4{,}03$ с; $h_1 = 122$ м.

1.39. С башни высотой $H = 150$ м без начальной скорости отпустили тело. Через 1 с бросили второе тело со скоростью $v_{02} = 6$ м/с, направленной вертикально вниз. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите время падения t_1 и t_2 тел на землю и какое из тел упадет на землю раньше. ***Ответ***: $t_1 = 5{,}53$ с; $t_2 = 4{,}95$ с; первое тело упадет раньше.

1.40. Воздушный шар поднимается с земли вертикально вверх с ускорением $a = 0{,}4$ м/с^2. Через $t_1 = 2$ мин после начала подъема из кабины уронили груз. Определите время падения груза $t_{пад}$ на землю (рис. 18). Сопротивлением воздуха пренебречь. ***Ответ***: $t_{пад} = 29{,}6$ с.

1.41.* Зависимость координаты тела от времени задается уравнением $x = A + Bt + Ct^2$, где $A = 4$ м; $B = 6$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с^2. Определите, через какое время t_1 после начала движения скорость тела станет равной $v_1 = 4$ м/с, и среднюю скорость $\langle v \rangle$ за этот промежуток времени. ***Ответ***: $t_1 = 2$ с; $\langle v \rangle = 5$ м/с.

1.42.* Кинематические уравнения движения двух материальных точек для координат имеют следующий вид: $x_1 = A_1 + B_1t + C_1t^2$; $x_2 = A_2 + B_2t + C_2t^2$, где $A_1 = -2$ м; $B_1 = 14$ м/с, $C_1 = 1$ м/с^2, $A_2 = 0$; $B_2 = 5$ м/с, $C_2 = -2{,}2$ м/с^2. Определите момент времени t_1, для которого скорости этих точек будут равны. Чему равна эта скорость? ***Ответ***: $t_1 = 1{,}41$ с; $v_1 = 16{,}8$ м/с.

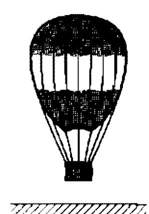


Рис. 18

1.43. Камень, брошенный вертикально вверх, упал на землю через $t_1 = 2{,}5$ с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите начальную скорость v_0

камня и высоту H, которой достиг камень. ***Ответ***: $v_0 = 12{,}3$ м/с; $H = 7{,}66$ м.

1.44. С высоты $h_1 = 15$ м над землей без начальной скорости начинает падать камень. Одновременно с высоты $h_2 = 10$ м вертикально вверх бросают другой камень. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, с какой начальной скоростью v_0 бросили второй камень, если камни встретились на высоте $h = 13$ м от поверхности земли. ***Ответ***: $v_0 = 7{,}82$ м/с.

1.45. С башни высотой $h = 200$ м с горизонтальной скоростью $v_0 = 5$ м/с бросили тело. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, через какой промежуток времени t и на каком расстоянии s от башни оно упадет. ***Ответ***: $t = 6{,}39$ с; $s = 32$ м.

1.46. С башни в горизонтальном направлении бросили камень с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите высоту H башни, если дальность полета камня s_{max} равна высоте падения. ***Ответ***: $H = 81{,}5$ м.

1.47. Мальчик, стоя на краю обрыва высотой $H = 15$ м, бросил камень под углом $\alpha = 35^\circ$ к горизонту со скоростью $v_0 = 9$ м/с вверх (рис. 19). Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, через какой промежуток времени t_1 камень упадет на землю. На каком расстоянии s_{max} от края обрыва произойдет падение? ***Ответ***: $t_1 = 2{,}35$ с; $s_{max} = 17{,}3$ м.

1.48. С наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 20^\circ$, горизонтально брошен камень (рис. 20). Определите начальную скорость броска v_0, если камень упал на расстоянии $l = 15$ м от точки броска. ***Ответ***: $v_0 = 3{,}03$ м/с.

1.49. С самолета, летящего горизонтально на высоте $h = 6$ км со скоростью $v = 250$ км/ч, сбрасывается бомба. Определите расстояние s до места падения (по горизонтали). ***Ответ***: $s = 2{,}43$ км.

1.50. Тело брошено со скоростью $v_0 = 90$ м/с под углом $\alpha = 40^\circ$ к горизонту вверх (см. рис. 6). Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите высоту H подъема тела; дальность полета

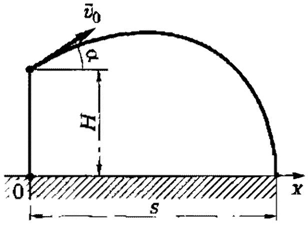


Рис. 19

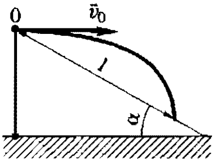


Рис. 20

по горизонтали s; время подъема t_1; время движения t тела. ***Ответ***: $H = 171$ м; $s = 813$ м; $t_1 = 5{,}9$ с; $t = 11{,}8$ с.

1.51. Определите, под каким углом α к горизонту был брошен камень, если дальность полета s в три раза больше высоты подъема H (см. рис. 6). ***Ответ***: $\alpha = 53{,}1^\circ$.

1.52. Тело, вращаясь равномерно, сделало $N = 40$ оборотов за время $t = 8$ с. Определите его угловую скорость ω. ***Ответ***: $\omega = 10\pi$ рад/с.

1.53. Тело, вращаясь равноускоренно без начальной скорости, сделало $N = 60$ оборотов за время $t = 15$ с. Определите его угловое ускорение ε. ***Ответ***: $\varepsilon = 3{,}35$ рад/с^2.

1.54. Тело, вращаясь равноускоренно без начальной скорости, сделало 50 оборотов за 20 с. Определите угловую скорость ω: 1) через 5 с после начала движения; 2) в конце движения. ***Ответ***: 1) $\omega_1 = 31{,}4$ рад/с; 2) $\omega_2 = 7{,}85$ рад/с.

1.55. Сколько полных оборотов N сделало равноускоренно вращающееся тело за $t_1 = 8$ с, если за первые пять секунд его угловая скорость увеличилась от 0 до $\omega_2 = 3$ рад/с? ***Ответ***: $N = 3$.

1.56. Определите время t, за которое скорость автомобиля уменьшилась с $v_1 = 60$ км/ч до $v_2 = 20$ км/ч, если колеса радиусом $R = 50$ см сделали за это время $N = 40$ оборотов. ***Ответ***: $t = 11{,}3$ с.

1.57. Лопасти вентилятора после выключения, двигаясь равнозамедленно, за время $t = 6$ с сделали до остановки $N = 20$ оборотов. Определите угловую скорость ω_1 и частоту вращения n_1 лопастей вентилятора в рабочем режиме, а также их угловое ускорение ε. ***Ответ***: $\omega_1 = 41{,}9$ рад/с; $n_1 = 6{,}67$ с$^{-1}$; $\varepsilon = 6{,}98$ рад/с^2.

1.58. Колесо механизма вращается с постоянной частотой $n_1 = 240$ мин$^{-1}$. При переходе на меньшую мощность частота вращения за время $t = 5$ с уменьшилась в 1,2 раза. Считая движение равнозамедленным, определите угловое ускорение ε и число полных оборотов N за время торможения. ***Ответ***: $\varepsilon = 1{,}26$ рад/с^2; $N = 27$.

1.59. Колесо, вращаясь равнозамедленно с начальной угловой скоростью $\omega_1 = 40$ рад/с, сделало $N = 40$ оборотов. Определите угловое ускорение ε колеса и промежуток времени t до полной остановки. ***Ответ***: $\varepsilon = 3{,}18$ рад/с^2; $t = 12{,}6$ с.

1.60. Материальная точка движется по окружности радиусом $r = 30$ см с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 5$ см/с^2. Определите, через какой промежуток времени t после начала движения нормальное ускорение a_n будет больше тангенциального a_τ в три раза. ***Ответ***: $t = 4{,}24$ с.

1.61.* Зависимость пройденного телом пути от времени по окружности радиусом $r = 3$ м задается уравнением $s = At^2 + Bt$, где $A = 0,4$ м/с^2, $B = 0,1$ м/с. Определите для момента времени $t = 1$ с после начала движения нормальное a_n, тангенциальное α_τ и полное a ускорение. ***Ответ***: $a_n = 0,27$ м/с^2; $\alpha_\tau = 0,8$ м/с^2; $a = 0,84$ м/с^2.

1.62. Угловая скорость ω лопастей вентилятора равна 6,28 рад/с. Определите число N полных оборотов лопастей за время $t = 8$ мин. ***Ответ***: $N = 480$.

1.63. Лопасти вентилятора после выключения за время $t = 6$ с, двигаясь равнозамедленно, сделали до остановки $N = 30$ оборотов. Определите угловую скорость ω_0, угловое ускорение ε и частоту вращения n лопастей вентилятора в рабочем режиме. ***Ответ***: $\omega_0 = 62,8$ рад/с; $\varepsilon = 10,5$ рад/с^2; $n = 10$ с$^{-1}$.

1.64. Маховое колесо, имеющее частоту вращения $n_0 = 180$ об/мин, останавливается, двигаясь равнозамедленно, в течение $t = 30$ с. Определите число N полных оборотов, сделанных маховым колесом до полной остановки. ***Ответ***: $N = 45$.

1.65. Для вращающейся с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0,06$ рад/с^2 точки через какое-то время t угол α между вектором полного ускорения и вектором скорости становится равным 40° (см. рис. 7). Определите этот промежуток времени. ***Ответ***: $t = 3,74$ с.

Глава 2

Динамика

Основные законы и формулы

■ Импульс материальной точки

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

[m — масса материальной точки; $\vec{v}$ — ее скорость].

■ Координата x_C центра масс системы материальных точек:

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

[m_1, m_2, ..., m_n — массы материальных точек; x_1, x_2, ..., x_n — их координаты].

■ Второй закон Ньютона (основное уравнение динамики материальной точки)

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

или

$$\vec{F} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}.$$

■ Это же уравнение в проекциях на касательную и нормаль к траектории точки, движущейся по окружности:

$$F_\tau = ma_\tau;$$

$$F_n = ma_n = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2R.$$

■ Закон Гука

$$F_{упр} = -kx$$

[$F_{упр}$ — сила упругости; k — жесткость пружины; x — удлинение (сжатие) пружины].

■ Сила трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N$$

[μ — коэффициент трения скольжения; N — сила нормальной реакции опоры].

■ Закон всемирного тяготения

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

[F — сила тяготения (всемирного тяготения); m_1 и m_2 — массы материальных точек; r — расстояние между точками; G — гравитационная постоянная ($G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ м^3/(кг$\cdot$с^2))].

■ Сила тяжести

$$F_т = mg$$

[m — масса тела; g — ускорение свободного падения].

■ Первая космическая скорость

$$v_I = \sqrt{gR}$$

[g — ускорение свободного падения; R — радиус планеты].

Примеры решения задач

1 N материальных точек массами m, $2m$, $3m$, ..., Nm расположены вдоль одной прямой на одинаковом расстоянии x друг от друга (рис. 21). Определите положение x_C центра масс этой системы.

Дано: m, $2m$, $3m$, ..., Nm; x.

Найти: x_C.

Решение. Координата центра масс системы материальных точек

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \tag{1}$$

где m_1, m_2, ..., m_n — массы материальных точек; x_1, x_2, ..., x_n — их координаты.

Начало координат выберем слева в точке на расстоянии x от первой материальной точки (см. рис. 21). Тогда, согласно формуле (1), можно записать

$$x_C = \frac{mx + 2m\cdot 2x + \ldots Nm\cdot Nx}{m + 2m + \ldots + Nm} = \frac{x(1^2 + 2^2 + \ldots + N^2)}{1 + 2 + \ldots + N} =$$

$$= \frac{xN(N+1)(2N+1)}{6}\cdot\frac{2}{N(N+1)} = \frac{x(2N+1)}{3}.$$

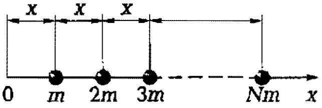


Рис. 21

Ответ: $x_C = \dfrac{x(2N+1)}{3}$.

2 На двигавшееся прямолинейно со скоростью $v_1 = 5$ м/с тело массой $m = 2$ кг в течение двух секунд ($t_1 = 2$ с) действует тормозящая сила $F = 1,7$ Н. Какой путь s пройдет тело в течение следующих трех секунд ($t_2 = 3$ с) после прекращения действия силы?

Дано: $v_1 = 5$ м/с; $m = 2$ кг; $F = 1,7$ Н; $t_1 = 2$ с; $t_2 = 3$ с.

Найти: s.

Решение. Для движения с постоянным ускорением

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{a}t,$$

или в проекции на направление скорости $\vec{v}_1$

$$v_2 = v_1 - at.$$

Согласно второму закону Ньютона,

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Таким образом,

$$v_2 = v_1 - \frac{F}{m}t_1.$$

Пройденный за время t_2 путь определяется как $s = v_2t_2$, так как движение после прекращения действия силы равномерное,

$$\boxed{s = \left(v_1 - \frac{F}{m}\right)t_2}$$

$$1\ \text{Н} = 1\ \text{кг}\cdot\text{м/с}^2;\ [s] = \left(\text{м/с} - \frac{\text{Н}}{\text{кг}}\cdot\text{с}\right)\cdot\text{с} = \text{м}.$$

Ответ: $s = 9,9$ м.

3 Автомат выпускает $N = 500$ пуль в минуту. Определите среднюю силу F отдачи при стрельбе, если масса пули $m = 5$ г, а скорость пули при выстреле из канала ствола $v = 420$ м/с.

Дано: $N = 500$; $\Delta t = 1$ мин $= 60$ с; $m = 5$ г $= 5\cdot10^{-3}$ кг; $v =$ $= 420$ м/с.

Найти: F.

Решение. Импульс пуль, вылетающих из ствола автомата за время Δt,

$$\Delta p = nmv\Delta t,$$

где n — число выпущенных пуль в 1 с:

$$n = \frac{N}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Изменение импульса Δp пуль за время Δt равно $F\Delta t$, т. е.

$$nmv\Delta t = F\Delta t.$$

Учитывая (1), находим искомую среднюю силу при стрельбе

$$F = nmv = \frac{Nmv}{\Delta t}.$$

$$\boxed{F = \frac{Nmv}{\Delta t}}$$

$$[F] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м/с}}{\text{с}} = \text{Н}.$$

Ответ: $F = 17{,}5$ Н.

4* Тело массой $m = 2$ кг движется так, что зависимость координаты от времени описывается уравнением $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где A, B, C и D — постоянные, $C = 1$ м/с^2, $D = -1{,}2$ м/с^3. Запишите закон изменения силы от времени. Чему равна сила в момент времени $t_1 = 5$ с?

Дано: $m = 2$ кг; $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$; $C = 1$ м/с^2; $D = -1{,}2$ м/с^3; $t_1 = 5$ с.

Найти: $F(t)$; $F(t_1)$.

Решение. Согласно второму закону Ньютона,

$$F = ma. \tag{1}$$

Учитывая, что скорость

$$v = \frac{dx}{dt} = B + 2Ct + 3Dt^2,$$

найдем ускорение

$$a = \frac{dv}{dt} = 2C + 6Dt. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), запишем искомый закон изменения силы от времени

$$\boxed{F(t) = m(2C + 6Dt)}$$

Для момента времени t_1

$$\boxed{F(t_1) = m(2C + 6Dt_1)}$$

$$F = \text{кг}[\text{м/с}^2 + (\text{м/с}^3) \cdot \text{с}] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}.$$

Ответ: $F(t) = m(2C + 6Dt)$; $F(t_1) = -68$ Н.

5 Три бруска массами $m_1 = 1{,}5$ кг, $m_2 = 1{,}8$ кг и $m_3 = 2{,}1$ кг, соединенные невесомой и нерастяжимой нитью, движутся по горизонтальной поверхности под действием горизонтальной силы $F = 30$ Н. Коэффициент трения брусков о поверхность $\mu = 0{,}3$. Определите силы натяжения T_1 и T_2, возникающие в нити.

Дано: $m_1 = 1{,}5$ кг; $m_2 = 1{,}8$ кг; $m_3 = 2{,}1$ кг; $F = 30$ Н; $\mu = 0{,}3$.

Найти: T_1; T_2.

Решение. Запишем второй закон Ньютона для каждого из брусков в векторной форме (рис. 22), учитывая, что силы реакции опоры N и тяжести $m\vec{g}$ взаимно компенсируются:

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{\text{тр}_1},$$

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{T}_1' + \vec{T}_2 + \vec{F}_{\text{тр}_2},$$

$$m_3\vec{a}_3 = \vec{T}_2' + \vec{F}_{\text{тр}_3},$$

где $\vec{T}$ — силы натяжения; $\vec{F}_{\text{тр}}$ — силы трения.

Так как нити невесомы, то

$$T_1 = T_1',\ T_2 = T_2'.$$

Нити нерастяжимы ($a_1 = a_2 = a_3 = a$), поэтому уравнения второго закона Ньютона в проекции на выбранную ось x (см. рис. 22) имеют вид

$$m_1 a = F - T_1 - \mu m_1 g, \tag{1}$$

$$m_2 a = T_1 - T_2 - \mu m_2 g,$$

$$m_3 a = T_2 - \mu m_3 g. \tag{2}$$

Складывая левые и правые части записанных уравнений, найдем

$$a = \frac{F - \mu g(m_1 + m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}. \tag{3}$$

Подставив (3) в выражение (1), определим искомую силу натяжения T_1

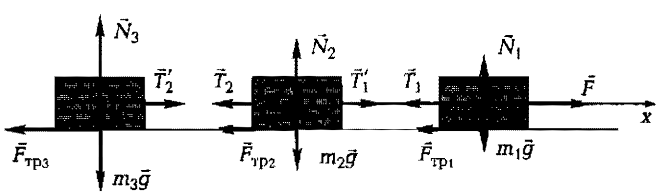


Рис. 22

$$\boxed{T_1 = \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} F}$$

Подставив (3) в выражение (2), найдем искомую силу натяжения T_2

$$\boxed{T_2 = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} F}$$

Так как $T_1 > T_2$, то в случае увеличения действующей силы F нить оборвется между первым и вторым телами.

Ответ: $T_1 = 21{,}7$ Н; $T_2 = 11{,}7$ Н.

6 Два бруска соединены невесомой и нерастяжимой нитью. К первому бруску приложена сила $F = 4{,}2$ Н, составляющая с горизонтом угол $\alpha = 31^\circ$, в результате тела движутся с ускорением $a = 0{,}5$ м/с^2. Коэффициент трения μ брусков о поверхность равен 0,3. Определите массу m_2 второго тела, если масса первого $m_1 = 0{,}5$ кг.

Дано: $F = 4{,}2$ Н; $\alpha = 31^\circ$; $a = 0{,}5$ м/с^2; $\mu = 0{,}3$; $m_1 = 0{,}5$ кг.

Найти: m_2.

Решение. Запишем второй закон Ньютона для каждого из брусков в векторной форме (рис. 23):

$$m_1\vec{a} = \vec{F} + m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T} + \vec{F}_{\text{тр}_1},$$

$$m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}' + \vec{F}_{\text{тр}_2}.$$

Нить невесома, поэтому

$$T = T'.$$

Запишем уравнения второго закона Ньютона в проекции на выбранную ось x

$$m_1 a = F\cos\alpha - T - F_{\text{тр}_1};$$

$$m_2 a = T - F_{\text{тр}_2}.$$

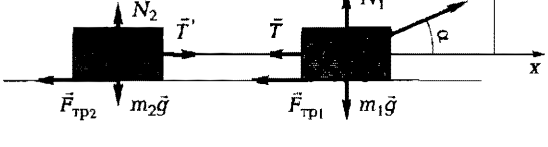


Рис. 23

Так как сила трения

$$F_{тр} = \mu N,$$

где N — сила реакции опоры, то можно записать

$$m_1 a = F\cos\alpha - T - \mu N_1, \qquad (1)$$

$$m_2 a = T - \mu N_2. \qquad (2)$$

Уравнения второго закона Ньютона в проекции на выбранную ось y имеют вид

$$N_1 - m_1 g + F\sin\alpha = 0,$$

$$N_2 - m_2 g = 0,$$

или

$$N_1 = m_1 g - F\sin\alpha, \qquad (3)$$

$$N_2 = m_2 g. \qquad (4)$$

Подставив выражения (3) и (4) в формулы (1) и (2), получим

$$m_1 a = F\cos\alpha - T - \mu(m_1 g - F\sin\alpha), \qquad (5)$$

$$m_2 a = T - \mu m_2 g. \qquad (6)$$

Почленно сложив уравнения (5) и (6), найдем искомую массу второго тела

$$\boxed{m_2 = \frac{-m_1(a+\mu g) + F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{a+\mu g}}$$

$$[m_2] = \frac{кг(м/с^2 + м/с^2) + Н}{м/с^2} = кг.$$

Ответ: $m_2 = 0{,}734$ кг.

7 Через блок, укрепленный на конце стола, перекинута невесомая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы, один из которых (m_1 = 200 г) движется по поверхности стола, а другой (m_2 = 300 г) — вдоль вертикали вниз. Коэффициент μ трения груза о стол равен 0,15. Считая нить и блок невесомыми, определите ускорение a, с которым движутся грузы, и силу натяжения T нити.

Дано: m_1 = 200 г = 0,2 кг; m_2 = 300 г = 0,3 кг; μ = 0,15.

Найти: a; T.

Решение. На каждый брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$, а на брусок массой m_1 еще и сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$ (рис. 24).

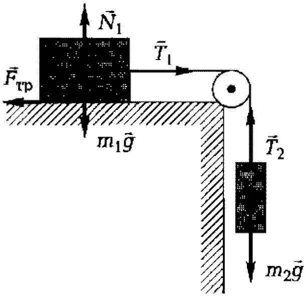


Рис. 24

Запишем второй закон Ньютона для каждого из тел в векторной форме

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{тр}; \qquad (1)$$

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2. \qquad (2)$$

Силы натяжения $\vec{T}$ по обе стороны блока равны по модулю ($T_1 = T_2 = T$), так как нить и блок невесомы; $a_1 = a_2 = a$, поскольку нить нерастяжима.

Запишем уравнения (1) и (2) в проекциях на выбранные оси

$$m_1 a = T - F_{тр},$$

$$m_2 a = m_2 g - T.$$

Учитывая, что $F_{тр} = \mu m_1 g$, получим

$$m_1 a = T - \mu m_1 g, \qquad (3)$$

$$m_2 a = m_2 g - T, \qquad (4)$$

откуда искомое ускорение

$$\boxed{a = \frac{(m_2 - \mu m_2)g}{m_1 + m_2}}$$

Согласно уравнению (4), сила натяжения нити

$$\boxed{T = m_2(g - a)}$$

Ответ: $a = 5{,}3$ м/с^2; $T = 1{,}35$ Н.

8 С наклонной плоскости, угол наклона которой $\alpha = 27°$ к горизонту, соскальзывает тело и проходит по горизонтали путь $s = 2{,}1$ м. Определите длину l наклонной плоскости, если коэффициент трения μ между телом и поверхностью на всем пути равен 0,3.

Дано: $\alpha = 27°$; $s = 2{,}1$ м; $\mu = 0{,}3$.

Найти: l.

Решение. Запишем второй закон Ньютона для тела на наклонной плоскости в векторной форме (рис. 25)

$$m\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тр_1}, \qquad (1)$$

где a_1 — ускорение тела, соскальзывающего вдоль наклонной плоскости.

Уравнение (1) в проекциях на выбранные оси

ось x:

$$ma_1 = mg\sin\alpha - \mu N_1, \qquad (2)$$

ось y:

$$N_1 - mg\cos\alpha = 0 \qquad (3)$$

(учли, что $F_{тр} = \mu N$).

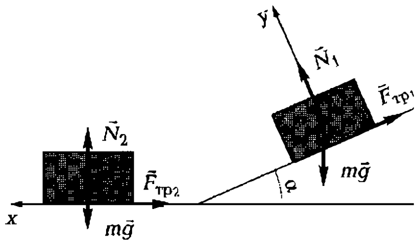


Рис. 25

Из уравнения (3) найдем

$$N_1 = mg\cos\alpha.$$

Подставив последнее выражение в (2), получим

$$ma_1 = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha,$$

откуда

$$a_1 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha). \qquad (4)$$

Скорость тела у подножия наклонной плоскости

$$v_1 = v_0 + a_1t_1 = a_1t_1 \qquad (5)$$

(учли, что $v_0 = 0$).

Длина наклонной плоскости

$$l = \frac{a_1t_1^2}{2}, \qquad (6)$$

где t_1 — время скольжения тела по наклонной плоскости.

Из уравнений (5) и (6), исключив t_1, получаем

$$v_1^2 = 2a_1l,$$

или, учитывая выражение (4), имеем

$$v_1^2 = 2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)l. \qquad (7)$$

Запишем второй закон Ньютона для тела на горизонтальном участке в проекции на осях (см. рис. 25)

ось x:

$$ma_2 = -F_{тр_2},$$

ось y:

$$N_2 = mg,$$

Разделив почленно и учитывая, что $F_{тр} = \mu N$, получим

$$a_2 = -\mu g. \qquad (8)$$

Для горизонтального участка кинематическое соотношение между скоростью, ускорением и перемещением имеет вид

$$v_1^2 - v_2^2 = 2a_2 s.$$

Так как тело останавливается, то $v_2 = 0$, и

$$v_1^2 = 2\mu g s \tag{9}$$

[учли формулу (8)]. Приравнивая правые части выражений (9) и (7), получаем

$$2\mu g s = 2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)l,$$

откуда искомая длина наклонной плоскости

$$\boxed{l = \frac{\mu s}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}}$$

Ответ: $l = 3{,}44$ м.

9 На наклонной плоскости длиной $l = 20$ м с углом наклона $\alpha_1 = 24^\circ$ к горизонту находится в равновесии некоторое тело. Определите время t, за которое тело соскользнет с плоскости, если угол α_2 наклона плоскости составит 32°.

Дано: $l = 20$ м; $\alpha_1 = 24^\circ$; $\alpha_2 = 32^\circ$; $a_1 = 0$.

Найти: t.

Решение. Запишем второй закон Ньютона для тела на наклонной плоскости в векторной форме (рис. 26):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}, \tag{1}$$

где $m\vec{g}$ — сила тяжести; N — сила нормальной реакции опоры; $\vec{F}_{тр}$ — сила трения.

Направим ось x параллельно наклонной плоскости вниз, а ось y — перпендикулярно наклонной плоскости вверх. Уравнение (1) в проекциях на выбранные оси для случая равновесия ($a_1 = 0$)

$$0 = mg\sin\alpha_1 - F_{тр}, \tag{2}$$

$$0 = -mg\cos\alpha_1 + N. \tag{3}$$

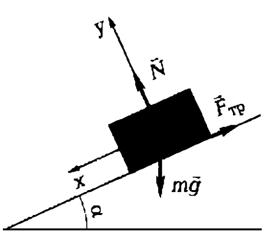


Рис. 26

Из уравнения (3) найдем силу нормальной реакции опоры

$$N = mg\cos\alpha_1. \tag{4}$$

Сила трения

$$F_{тр} = \mu N. \tag{5}$$

Учитывая выражения (3) и (4), запишем уравнение (2) в виде

$$mg\sin\alpha_1 - \mu mg\cos\alpha_1 = 0,$$

откуда коэффициент трения

$$\mu = \operatorname{tg}\alpha_1. \qquad (6)$$

Запишем второй закон Ньютона для тела, соскальзывающего с наклонной плоскости с бо́льшим углом α_2 наклона ее к горизонту ($a_2 \neq 0$), в проекции на ось x

$$ma_2 = mg\sin\alpha_2 - \mu mg\cos\alpha_2,$$

откуда ускорение, с которым тело скользит по наклонной плоскости,

$$a_2 = g(\sin\alpha_2 - \mu\cos\alpha_2) = g(\sin\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1\cos\alpha_2) \qquad (7)$$

[учли формулу (6)].

В случае равноускоренного движения с начальной нулевой скоростью

$$l = \frac{a_2t^2}{2},$$

откуда

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a_2}}. \qquad (8)$$

Подставив в формулу (8) выражение (7), найдем искомое время

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1\cos\alpha_2)}}}$$

Ответ: t = 5,17 с.

10 Мотоциклист совершает «мертвую петлю» радиусом R = 200 м. Определите силу давления мотоциклиста на сиденье в верхней N_1 и нижней N_2 точках, если его масса m = 70 кг, а скорость v = 162 км/ч. Какую скорость v_0 должен иметь мотоцикл при том же радиусе петли, чтобы сила давления мотоциклиста на сиденье в верхней точке оказалась равной нулю?

Дано: R = 200 м; m = 70 кг; v = 162 км/ч = 45 м/с.

Найти: N_2, N_2,v_0.

Решение. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось, направленную к центру окружности (рис. 27):

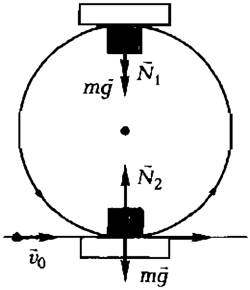


Рис. 27

■ для верхней точки

$$\frac{mv^2}{R} = mg + N_1; \qquad (1)$$

■ для нижней точки

$$\frac{mv^2}{R} = N_2 - mg \qquad (2)$$

(учли, что нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$).

Найдем из уравнений (1) и (2) искомые силы давления

$$\boxed{N_1 = \frac{mv^2}{R} - mg} \qquad \boxed{N_2 = \frac{mv^2}{R} + mg}$$

При силе давления на сиденье в верхней точке $N_1 = 0$ уравнение (1) принимает вид

$$\frac{mv_0^2}{R} = mg,$$

откуда искомая скорость

$$\boxed{v_0 = \sqrt{gR}}$$

$$[N_{1,2}] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2}{\text{м}} + \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2 = \text{Н};$$

$$[v_0] = \sqrt{\text{м}/(\text{с}^2) \cdot \text{м}} - \text{м}/\text{с}.$$

Ответ: $N_1 = 22$ Н; $N_2 = 1{,}4$ кН; $v_0 = 159$ км/ч.

11 Определите скорость v движения спутника и период T его обращения вокруг Земли, если спутник движется по круговой орбите на высоте $h = 300$ км над поверхностью Земли.

Дано: $h = 300$ км $= 3 \cdot 10^5$ м.

Найти: v; T.

Решение. Согласно второму закону Ньютона,

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}, \qquad (1)$$

где m — масса спутника; r — расстояние от спутника до центра Земли (радиус круговой орбиты спутника): $r = h + R$ ($R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м — радиус Земли); $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг$\cdot$с^2) — гравитационная постоянная; $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг — масса Земли.

Выражение (1) запишем в виде

$$\frac{mv^2}{h+R} = G\frac{mM}{(h+R)^2},$$

откуда искомая скорость движения спутника

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{h+R}}}$$

Период обращения спутника вокруг Земли

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{2}$$

где ω — угловая скорость. Из формулы $v = \omega r$, где $r = h + R$, получим

$$\omega = \frac{v}{h+R}. \tag{3}$$

Подставив выражение (3) в формулу (2), найдем искомый период обращения спутника вокруг Земли

$$\boxed{T = \frac{2\pi(h+R)}{v}}$$

$$[v] = \sqrt{\frac{\text{м}^3/(\text{кг}\cdot\text{с}^2)\cdot\text{кг}}{\text{м}}} = \text{м}; \quad [T] = \frac{\text{м}}{\text{м/с}} = \text{с}.$$

Ответ: $v = 7{,}73$ км/с; $T = 5{,}42\cdot10^3$ с.

12 Определите среднюю плотность $\langle\rho\rangle$ Луны, если известно, что ускорение свободного падения у поверхности Луны $g = 1{,}7$ м/с^2, а ее радиус $R = 1{,}74$ Мм.

Дано: $g = 1{,}7$ м/с^2; $R = 1{,}74$ Мм $= 1{,}74\cdot10^6$ м.

Найти: $\langle\rho\rangle$.

Решение. Средняя плотность Луны

$$\langle\rho\rangle = \frac{M}{V}, \tag{1}$$

где M — масса Луны; V — ее объем.

Для тела, находящегося у поверхности Луны, $mg = G\frac{mM}{R^2}$ (g — ускорение свободного падения на Луне), откуда масса Луны

$$M = \frac{gR^2}{G}. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в формулу (1) и учитывая, что $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, найдем искомую среднюю плотность Луны

$$\boxed{\langle\rho\rangle = \frac{3g}{4\pi GR}}$$

$$[\langle\rho\rangle] = \frac{\text{м/с}^2}{\text{м}^3/(\text{кг}\cdot\text{с}^2)\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\langle\rho\rangle = 3{,}5$ г/см^3.

13 При торможении поднимающегося лифта его ускорение $a = 1{,}2$ м/с^2. Как при этом изменился вес P_2/P_1 пассажира, если его масса $m = 60$ кг?

Дано: $a = 1{,}2$ м/с^2; $m = 60$ кг.

Найти: $\frac{P_2}{P_1}$.

Решение. Для тела в неподвижном лифте, согласно второму закону Ньютона (рис. 28),

$$m\vec{g} + \vec{N}_1 = 0,$$

где N_1 — сила реакции опоры;

$$mg - N_1 = 0,$$

$$N_1 = mg.$$

Вес тела всегда равен силе реакции опоры: $P = N$. В случае неподвижного лифта

$$P_1 = mg.$$

В движущемся с ускорением лифте

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_2.$$

Поскольку лифт тормозится, его ускорение противоположно скорости, т.е. направлено вниз. Приняв направление оси в сторону ускорения (см. рис. 28), запишем второй закон Ньютона в проекции на ось x

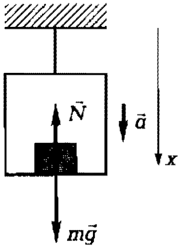


Рис. 28

$$ma = mg - N_2,$$

$$N_2 = P_2 = m(g - a) < P_1.$$

$$\boxed{\frac{P_2}{P_1} = \frac{g-a}{g}}$$

Ответ: $\frac{P_2}{P_1} = 0{,}878.$

Задачи для самостоятельного решения

1.66. Во сколько раз изменится импульс тела, если его массу увеличить в три раза, а скорость уменьшить в шесть раз? ***Ответ***: уменьшится в два раза.

1.67. Определите соотношение между ускорениями двух скользящих по столу медных монет, приобретенными при их лобовом столкновении, если толщина монет одинакова, а радиус одной в три раза больше радиуса другой. ***Ответ***: $a_2/a_1 = 9$.

1.68. Определите импульс тела массой $m = 2$ кг через $t = 5$ с после начала прямолинейного движения, зависимость ускорения которого от времени представлена на рис. 29. Начальная скорость $v_0 = 0$. ***Ответ***: $p = 8$ кг·м/с.

1.69. Определите положение центра масс системы, состоящей из пяти материальных точек, массами $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 3$ кг, $m_4 = 4$ кг, $m_5 = 5$ кг, находящихся на одной прямой на одинаковом расстоянии $l = 10$ см друг от друга (рис. 30). ***Ответ***: $x_C = 0{,}267$ м.

1.70. Определите положение центра масс системы из двух шаров массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 3$ кг и радиусами $R_1 = 5$ см и $R_2 = 10$ см, приваренных к стержню массой $m_3 = 0{,}5$ кг и длиной $l = 60$ см (рис. 31). ***Ответ***: $x_C = 0{,}539$ м.

1.71. Определите положение центра масс системы, состоящей из трех материальных точек массами $m_1 = 2{,}4$ кг, $m_2 = 2$ кг и $m_3 = 3$ кг, находящихся в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 40$ см (рис. 32). ***Ответ***: $x_C = 17{,}3$ см; $y_C = 11{,}2$ см.

1.72. Определите положение центра масс системы, состоящей из четырех шаров, находящихся в вершинах квадрата стороной $a = 50$ см. Массы двух верхних шаров $m_2 = m_3 = 2$ кг, двух нижних $m_1 = m_4 = 4$ кг (рис. 33). ***Ответ***: $x_C = 25$ см; $y_C = 16{,}7$ см.

1.73. Из однородной круглой пластинки радиусом $R = 1$ м вырезано круглое отверстие, центр которого находится на вы-

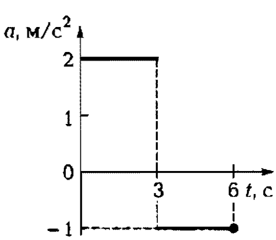


Рис. 29

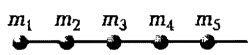


Рис. 30

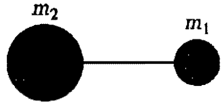


Рис. 31

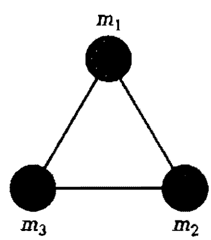


Рис. 32

соте $h = R/4$ от центра вертикального радиуса большого круга (рис. 34). Определите положение центра масс этой фигуры, если радиус отверстия $r = 60$ см. ***Ответ***: $x_C = -14{,}1$ см.

1.74. Тело массой $m = 1{,}6$ кг под действием некоторой силы F_1 движется с ускорением $a_1 = 2$ м/с^2. Определите силу F_2, под действием которой ускорение тела увеличится в $n = 3$ раза. ***Ответ***: $F_2 = 9{,}6$ Н.

1.75. Тело под действием на него силы $F_1 = 100$ Н получило ускорение $a_1 = 0{,}5$ м/с^2. Под действием какой силы F_2 тело получит ускорение $a_2 = 0{,}8$ м/с^2? ***Ответ***: $F_2 = 160$ Н.

1.76. Тело массой $m = 0{,}3$ кг начинает двигаться равноускоренно и прямолинейно и за время $t = 6$ с проходит путь, равный 48 м. Определите силу F, действующую на тело. ***Ответ***: $F = 0{,}8$ Н.

1.77. На тело массой $m = 2$ кг, лежащее на горизонтальной поверхности, действует горизонтальная сила $F = 5$ Н. Чему равно ускорение a тела, если коэффициент трения $\mu = 0{,}4$? ***Ответ***: $a = 0$.

1.78. Под действием горизонтальной силы груз массой $M =$ $= 1{,}2$ кг, лежащий на столе, приобретает ускорение $a_1 = 0{,}5$ м/с^2. Коэффициент трения между телом и столом $\mu = 0{,}3$. Чему равна действующая сила F? Определите массу m гирьки, положенной сверху, если после этого система движется с ускорением $a_2 = 0{,}3$ м/с^2 (рис. 35). ***Ответ***: $F = 4{,}13$ Н; $m = 73{,}5$ г.

1.79. Тело массой $M = 1{,}5$ кг, лежащее на горизонтальной поверхности, под действием горизонтальной силы движется с ускорением $a = 0{,}2$ м/с^2. Какой массы m гирьку надо положить на тело, чтобы оно оставалось неподвижным даже при увеличении действующей силы в два раза (см. рис. 35)? Коэффициент трения между телом и поверхностью $\mu = 0{,}5$. ***Ответ***: Более 1,62 кг.

1.80. Определите равнодействующую F сил $F_1 = F_2 = 120$ Н, угол между которыми составляет: 1) $\varphi_1 = 20°$; 2) $\varphi_2 = 60°$. ***Ответ***: 1) $F_1 = 236$ Н; 2) $F_2 = 208$ Н.

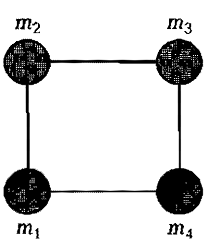


Рис. 33

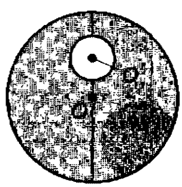


Рис. 34

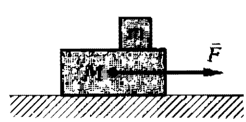


Рис. 35

1.81. На тело действует горизонтальная сила $F_1 = 200$ Н. Определите силу F_2, которую нужно приложить вертикально вверх, чтобы равнодействующая сил была направлена под углом $\alpha = 35^\circ$ к горизонту. ***Ответ***: $F_2 = 140$ Н.

1.82. Груз массой $m = 0{,}5$ кг на горизонтальной пружине после ее растяжения на $x_1 = 2$ см получает первоначальное ускорение $a_1 = 6$ м/с^2. Определите жесткость пружины k, а также на сколько Δx нужно ее растянуть дополнительно, чтобы тело получило первоначальное ускорение $a_2 = 8$ м/с^2. ***Ответ***: $k = 150$ Н/м; $\Delta x = 6{,}67$ мм.

1.83. На тело массой $m = 4$ кг, которое лежит на горизонтальной поверхности, действует сила $F = 20$ Н, направленная под углом $\alpha = 40^\circ$ к горизонту. Определите ускорение a тела, если коэффициент трения $\mu = 0{,}3$. ***Ответ***: $a = 1{,}85$ м/с^2.

1.84. Тело массой $m = 0{,}7$ кг, двигаясь с ускорением $a = 0{,}3$ м/с^2, прошло путь s, равный 16 м. Определите импульс $F\Delta t$ силы, действующей на тело за это время. Начальную скорость тела принять равной нулю. ***Ответ***: $F\Delta t = 2{,}17$ Н·с.

1.85. Под действием постоянной силы F тело массой $m = 0{,}3$ кг за время $t = 6$ с прошло путь $s = 400$ м. Определите эту силу, если первоначально тело находилось в состоянии покоя. ***Ответ***: $F = 6{,}67$ Н.

1.86. На тело массой $m = 3{,}5$ кг действуют две силы $F_1 = F_2 = 15$ Н, направленные под углом $\alpha = 90^\circ$ друг к другу. Определите ускорение a тела, если одна из сил имеет горизонтальное направление. ***Ответ***: $a = 6{,}06$ м/с^2.

1.87. Автомобиль массой $m = 1{,}6$ т на горизонтальном участке пути $s = 700$ м увеличивает скорость от $v_1 = 36$ км/ч до $v_2 = 54$ км/ч. Определите силу тяги $F_т$ автомобиля, если коэффициент трения $\mu = 0{,}15$. ***Ответ***: $F_т = 2{,}5$ кН.

1.88. Тело массой $m = 1{,}5$ кг движется со скоростью 20 км/ч, после чего останавливается под действием тормозящей силы $F = 6$ Н. Определите путь s и время торможения t тела. ***Ответ***: $s = 3{,}86$ м; $t = 1{,}39$ с.

1.89.* Зависимость координаты тела массой $m = 2$ кг от времени t описывается уравнением $x = A + Bt + Ct^2$, где $C = 3{,}5$ м/с^2. Определите силу, действующую на тело: 1) в конце второй секунды F_1; 2) в конце четвертой секунды F_2. ***Ответ***: $F_1 = 14$ Н; $F_1 = 14$ Н.

1.90.* Определите массу m тела, если оно под действием постоянной силы $F = 9$ Н движется прямолинейно так, что зависимость пройденного телом расстояния от времени описывается уравнением $s = A + Bt + Ct^2$, где $C = 1{,}5$ м/с^2. ***Ответ***: $m = 3$ кг.

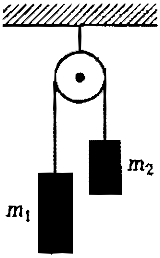


Рис. 36

1.91.* Тело массой $m = 3$ кг движется так, что зависимость координаты от времени описывается следующим уравнением: $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где A, B, C и D — постоянные, $C = -2$ м/с^2, $D = 1{,}5$ м/с^3. Запишите закон изменения силы от времени $F(t)$. ***Ответ***: $F(t) = (-12 + 27t)$ Н.

1.92. К нерастяжимой и невесомой нити подвешен груз массой $m = 1$ кг. Определите силу натяжения нити, если груз: 1) отпускается с ускорением $a_1 = 3$ м/с^2; 2) поднимается с ускорением $a_2 = 3$ м/с^2. ***Ответ***: 1) $T_1 = 6{,}81$ Н; 2) $T_2 = 12{,}8$ Н.

1.93. Тележка массой $m = 600$ кг под действием горизонтальной силы приобретает ускорение $a = 0{,}2$ м/с^2. Определите силу F, ускоряющую тележку, если коэффициент трения $\mu = 0{,}1$. ***Ответ***: $F = 709$ Н.

1.94. При подъеме груза массой $m = 1$ т с ускорением $a = 0{,}2$ м/с^2 трос удлинился на 20 см. Определите коэффициент упругости k троса. ***Ответ***: $k = 50$ кН/м.

1.95. На нерастяжимой и невесомой нити, перекинутой через неподвижный блок, подвешены два тела массой $m_1 = 800$ г и $m_2 = 750$ г (рис. 36). Пренебрегая трением и считая блок невесомым, определите ускорение тел. ***Ответ***: $a = 31{,}6$ см/с^2.

1.96. Через невесомый блок перекинута невесомая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены два груза одинаковой массы $M_1 = M_2 = 200$ г, на один из которых положен перегрузок массой $m = 40$ г (рис. 37). Определите силу давления $F_д$ перегрузка на груз и силу натяжения T нити. ***Ответ***: $F_д = 0{,}357$ Н; $T = 10{,}7$ Н.

1.97. Через невесомый блок перекинута невесомая нерастяжимая нить с грузами одинаковой массы $M = 100$ г, на один из которых положен перегрузок массой $m = 5$ г. Считая, что грузы первоначально находились на одной высоте и пренебрегая трением, определите разность высот Δh, на которой будут находиться грузы через промежуток времени $t = 2$ с (см. рис. 37). ***Ответ***: $\Delta h = 95{,}7$ см.

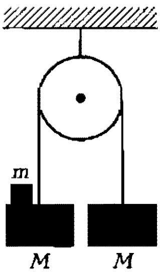


Рис. 37

1.98. Два груза соединены нерастяжимой нитью, перекинутой через блок, укрепленный на конце стола. Один из грузов ($m_1 = 800$ г) движется по поверхности стола, а другой ($m_2 = 400$ г) — по вертикали вниз (рис. 38). Коэффициент трении груза о стол $\mu = 0{,}2$. Считая нить и блок невесомыми,

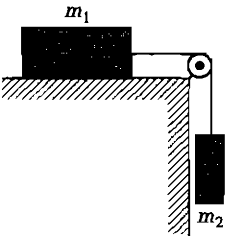


Рис. 38

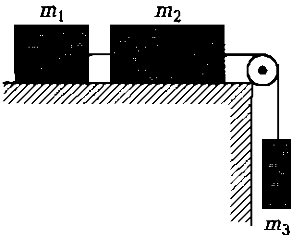


Рис. 39

определите ускорение a, с которым движутся грузы, и силу натяжения T нити. ***Ответ***: $a = 1{,}96$ м/с^2; $T = 3{,}14$ Н.

1.99. При падении с высоты $h = 10$ м тело массой $m = 0{,}4$ кг приобрело скорость $v = 11$ м/с. Считая силу сопротивления среды F_c постоянной, определите ее величину. ***Ответ***: $F_c = 1{,}5$ Н.

1.100. Тело массой $m = 120$ кг равноускоренно поднимают на тросе вверх в течение $t = 5$ с на высоту $h = 15$ м. Определите удлинение Δx троса, если его коэффициент упругости $k = 8$ кН/м. ***Ответ***: $\Delta x = 1{,}8$ см.

1.101. Три тела массами $m_1 = 0{,}1$ кг, $m_2 = 0{,}15$ кг и $m_3 = 0{,}12$ кг соединены невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через блок (рис. 39). Определите, при каком коэффициенте трения μ между телами и поверхностью возможно скольжение. ***Ответ***: $\mu < 0{,}48$.

1.102. Определите силу тяги $F_т$ автомобиля массой $m = 1{,}7$ т, если он на пути $s = 20$ м приобрел скорость $v = 40$ км/ч. Коэффициент трения μ принять равным 0,04. ***Ответ***: $F_т = 5{,}9$ кН.

1.103. Чему равна сила нормального давления F бруска массой $m = 400$ г на наклонную плоскость с углом наклона $\alpha = 35°$ к горизонту. ***Ответ***: $F = 3{,}21$ Н.

1.104. Брусок массой $m = 0{,}5$ кг без трения скатывается с наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 40°$ к горизонту. Определите ускорение a бруска и силу N нормальной реакции опоры. ***Ответ***: $a = 6{,}31$ м/с^2; $N = 3{,}76$ Н.

1.105. Чему должен быть равен коэффициент трения μ между бруском и наклонной плоскостью, чтобы брусок оставался неподвижным? Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 27°$. ***Ответ***: $\mu \geq 0{,}51$.

1.106. На наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 40°$ к горизонту находится брусок массой $m = 2$ кг, на который действует горизонтальная прижимающая сила F (рис. 40). Опре-

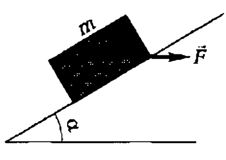


Рис. 40

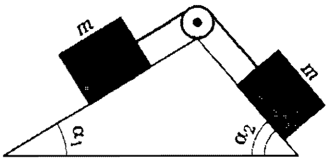


Рис. 41

делите коэффициент трения μ между бруском и наклонной плоскостью, если брусок начинает скользить при силе $F = 10$ Н. ***Ответ***: $\mu = 0{,}231$.

1.107. Определите, за какое время t тело, соскальзывая вдоль наклонной плоскости длиной $l = 2$ м, пройдет вторую половину пути, если угол наклона плоскости к горизонту равен 30°, коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью $\mu = 0{,}2$. ***Ответ***: $t = 0{,}327$ с.

1.108. На нерастяжимой и невесомой нити, перекинутой через неподвижный блок, на высоте $h = 1{,}5$ м подвешены два тела одинаковой массы $M = 500$ г. Определите, какую массу m должен иметь перегрузок, положенный на одно из тел, чтобы оно достигло поверхности Земли за время $t = 4$ с (см. рис. 37). ***Ответ***: $m = 19{,}5$ г.

1.109. Через невесомый блок, закрепленный на вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha_1 = 31°$ и $\alpha_2 = 55°$, перекинута нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы с одинаковыми массами (рис. 41). Считая нить невесомой и пренебрегая трением, определите ускорение грузов. ***Ответ***: $a = 8{,}83$ см/с^2.

1.110. Определите ускорения a_1 и a_2 тел и натяжение нитей T и T_1 в системе, приведенной на рис. 42. Масса одного тела $m_1 = 600$ г, масса другого $m_2 = 200$ г. Нити невесомы и нерастяжимы, массой блока и силами трения пренебречь. ***Ответ***: $a_1 = 1{,}4$ м/с^2; $a_2 = 2{,}8$ м/с^2; $T = 2{,}52$ Н; $T_1 = 5{,}04$ Н.

1.111. По горизонтальной поверхности под действием горизонтальной силы $F = 20$ Н движутся три бруска массами $m_1 = 1{,}2$ кг, $m_2 = 1{,}5$ кг и $m_3 = 2$ кг, соединенные невесомой и нерастяжимой нитью (рис. 43). Определите ускорение a тел, если коэффициент трения $\mu = 0{,}4$. ***Ответ***: $a = 0{,}331$ м/с^2.

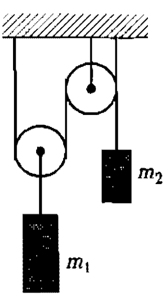


Рис. 42

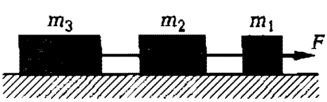


Рис. 43

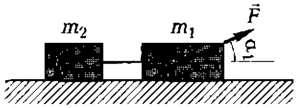


Рис. 44

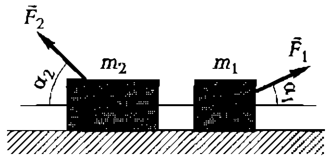


Рис. 45

1.112. Два бруска массами $m_1 = 0{,}6$ кг и $m_2 = = 0{,}4$ кг соединены невесомой и нерастяжимой нитью. К первому бруску приложена сила $F = 3$ Н, составляющая с горизонтом угол $\alpha = 35^\circ$ (рис. 44). Определите коэффициент трения μ брусков о поверхность, считая его одинаковым, если тела движутся с ускорением $a = 0{,}8$ м/с^2. ***Ответ***: $\mu = 0{,}21$.

1.113. К брускам массами $m_1 = 1{,}1$ кг и $m_2 = 1{,}4$ кг, лежащим на горизонтальной поверхности, приложены равные по величине силы $F = 40$ Н, составляющие с горизонтом соответственно угол $\alpha_1 = 25^\circ$ и $\alpha_2 = 35^\circ$ (рис. 45). Коэффициент трения между телами и поверхностью $\mu = 0{,}4$. Определите ускорение a тел, если нить, связывающая тела, является невесомой и нерастяжимой. ***Ответ***: $a = 3{,}84$ м/с^2.

1.114. Тело, съехав по наклонной плоскости с углом $\alpha = 37^\circ$ к горизонту и длиной $l = 80$ см, проходит по горизонтали путь $s = 1$ м. Определите коэффициент трения μ между телом и поверхностью, считая его одинаковым на всем пути. ***Ответ***: $\mu = 0{,}294$.

1.115. Определите допустимую массу m автомобиля для проезда по вогнутому мосту радиусом кривизны $R = 15$ м, если его скорость ограничена дорожным знаком $v = 30$ км/ч, а предельная сила давления на мост в нижней точке $N = 70$ кН. ***Ответ***: $m \le 4{,}85$ т.

1.116. По выпуклому мосту радиусом кривизны $R = 75$ м движется автомобиль. Определите скорость v автомобиля, если в верхней точке траектории сила его давления на мост в $n = 1{,}4$ раза меньше, чем при движении по горизонтальному участку. ***Ответ***: $v = 52{,}2$ км/ч.

1.117. Самолет описывает «мертвую петлю». Определите силу давления пилота на сиденье в верхней N_1 и нижней N_2 точках траектории, если радиус петли 300 м, скорость самолета 270 км/ч, а масса пилота 65 кг (рис. 46). Какую скорость v_0 должен

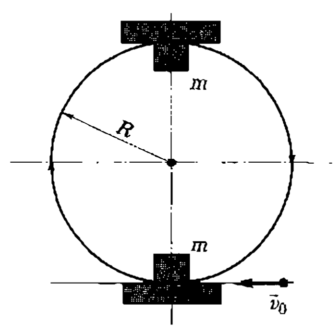


Рис. 46

иметь самолет при том же радиусе петли, чтобы сила давления летчика на сиденье в верхней точке была равна нулю? ***Ответ***: N_1 = 581 Н; N_2 = 1,86 кН; v_0 = 195 км/ч.

1.118. Шарик, подвешенный на нити длиной l = 80 см, совершает колебания в вертикальной плоскости. При прохождении шарика через положение равновесия со скоростью v = 1 м/с нить удлиняется на Δx = 4 см. Каково удлинение Δx_0 нити, если шарик висит неподвижно? ***Ответ***: Δx_0 = 3,55 см.

1.119. Шарик, подвешенный на нити длиной l = 60 см, совершает колебания в вертикальной плоскости и проходит положение равновесия со скоростью v = 1,5 м/с. Сравните возникающую при этом силу натяжения T_2 с силой натяжения T_1 в случае, если шарик висит неподвижно. ***Ответ***: T_2/T_1 = 1,38.

1.120. Шарик массой m = 300 г, подвешенный на нити длиной l = 70 см, совершает колебания в вертикальной плоскости. Сила натяжения нити T, когда нить составляет угол α = 30° с вертикалью, равна 5 Н. Определите скорость v шарика в этот момент. ***Ответ***: v = 2,39 м/с.

1.121. Тело массой m = 1,4 кг, лежащее на горизонтальной поверхности, под действием некоторой направленной под углом α = 20° к горизонту силы F за время t = 5 с проходит горизонтальный путь s = 60 м. Определите эту силу F, если коэффициент трения μ = 0,3. ***Ответ***: F = 10,4 Н.

1.122. Радиус некоторой планеты R = 2 500 км, продолжительность суток на ней T = 9 ч. Определите массу M этой планеты, если на полюсе тела весят в 1,3 раза больше, чем на экваторе. ***Ответ***: $M = 38{,}1 \cdot 10^{21}$ кг.

1.123. Определите среднюю плотность $\langle\rho\rangle$ вещества и первую космическую скорость v_I планеты, зная, что ее радиус R = = 9 000 км, а ускорение свободного падения на поверхности g = 13 м/с^2. ***Ответ***: $\langle\rho\rangle = 5{,}17 \cdot 10^3$ кг/м^3; v_I = 10,8 км/с.

1.124. Определите период T обращения спутника, движущегося по круговой орбите на высоте 500 км вокруг Марса. Массу Марса принять равной $6{,}42 \cdot 10^{23}$ кг, а радиус 3 400 км. ***Ответ***: T = 2,06 с.

1.125. При торможении опускающегося лифта его ускорение a = 1,2 м/с^2. Как при этом изменился вес пассажира? ***Ответ***: увеличился в 1,12 раза.

1.126. Как изменится вес космонавта при старте ракеты с ускорением $5g$? ***Ответ***: увеличится в 6 раз.

1.127. Чему равно ускорение свободного падения g_1 над полюсом Земли на высоте, равной одной трети радиуса Земли? ***Ответ***: g_1 = 5,52 м/с^2.

1.128. Принимая значение первой космической скорости Земли v_I = 7,9 км/с, определите ее значение для планеты, радиус которой в два раза больше радиуса Земли, а ускорение свободного падения на поверхности в три раза меньше земного. ***Ответ***: v = 6,45 км/с.

1.129. Определите ускорение свободного падения g у поверхности Луны, если известно, что средняя плотность Луны $\langle\rho\rangle$ = 3,34 г/см^3, а ее радиус R = 1,74 Мм. Определите также для Луны первую космическую скорость v_I. ***Ответ***: g = 1,62 м/с^2; v_I = 1,68 км/с.

1.130. Путь разгона лифта равен пути торможения s = 0,5 м, время разгона $t_р$ = 1,1 с, время торможения $t_т$ = 1,3 с. Определите вес мальчика массой m = 40 кг, поднимающегося в лифте: 1) во время подъема лифта с постоянной скоростью; 2) при начальном разгоне лифта; 3) при торможении лифта. ***Ответ***: 1) P_1 = 392 Н; 2) P_2 = 425 Н; 3) P_3 = 369 Н.

Глава 3

Законы сохранения в механике

Основные законы и формулы

■ Закон сохранения импульса для замкнутой системы

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n = \text{const}$$

[m_1, m_2, ..., m_n — массы материальных точек (или тел), входящих в систему; $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ — их скорости].

■ Скорость движения ракеты

$$\vec{u} = -\frac{m}{M}\vec{v}$$

[$\vec{v}$ — скорость истечения газов; m — масса выброшенного газа; M — масса ракеты].

■ Работа, совершаемая постоянной силой,

$$A = Fs\cos\alpha = F_s s$$

[F_s — проекция силы на направление перемещения; α — угол между направлениями силы и перемещения].

■ Средняя мощность за промежуток времени Δt

$$\langle N \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

■ Мощность в данный момент

$$N = \vec{F}\vec{v} = F_s v = Fv\cos\alpha.$$

■ Механический коэффициент полезного действия (КПД) двигателя

$$\eta = \frac{A}{A_{\text{затр}}}$$

[A — полезная работа; $A_{\text{затр}}$ — затраченная работа].

■ Работа силы тяжести

$$A = mg(h_1 - h_2)$$

[m — масса тела; g — ускорение свободного падения; h_1 и h_2 — начальная и конечная высоты над поверхностью Земли].

■ Работа силы упругости при сжатии пружины

$$A = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$$

[k — жесткость пружины].

■ Потенциальная энергия тела, поднятого над поверхностью Земли на высоту h,

$$E_п = mgh$$

[g — ускорение свободного падения].

■ Потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$E_п = \frac{kx^2}{2}$$

[k — жесткость пружины; x — деформация].

■ Работа консервативных сил при перемещении тела из одного положения в другое

$$A = -\Delta E_п$$

[$\Delta E_п$ — изменение потенциальной энергии].

■ Кинетическая энергия движущегося со скоростью v тела массой m

$$E_к = \frac{mv^2}{2}.$$

■ Теорема о кинетической энергии

$$A = \Delta E_к$$

[$\Delta E_к$ — изменение кинетической энергии; A — работа всех сил, действующих на тело].

■ Закон сохранения механической энергии (для консервативной системы)

$$E_к + E_п = E = \text{const}.$$

■ Закон сохранения энергии при наличии сил трения

$$E_2 - E_1 = -F_{тр}s = A_{тр}$$

[E_1 и E_2 — полная механическая энергия соответственно в начальном и конечном положениях; $A_{тр}$ — работа сил трения ($A_{тр} < 0$)].

■ Для абсолютно упругого центрального удара тел массами m_1 и m_2:

закон сохранения импульса

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2';$$

закон сохранения энергии

$$\frac{m_1\vec{v}_1^2}{2}+\frac{m_2\vec{v}_2^2}{2}=\frac{m_1\vec{v}_1'^2}{2}+\frac{m_2\vec{v}_2'^2}{2}$$

[$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ — скорости тел до удара; $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$ — скорости тел после удара].

■ Для двух тел массами m_1 и m_2, движущихся соответственно со скоростью $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, при абсолютно неупругом центральном ударе:

закон сохранения импульса

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=(m_1+m_2)\vec{v}$$

[$\vec{v}$ — общая скорость тел после удара].

■ Кинетическая энергия, расходуемая на деформацию тел:

$$E_к=\left(\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}\right)-\left(\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}\right)=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}\left(v_1^2-v_2^2\right)$$

[m_1, m_2 — массы тел; v_1, v_2 — соответственно их скорости до неупругого столкновения; v — скорость тел после неупругого столкновения].

Примеры решения задач

1 С железнодорожной платформы, движущейся со скоростью $v_п$ = 20 км/ч, выстрелили из пушки в направлении движения по горизонтали (рис. 47). Масса платформы с пушкой M = 10 т, масса снаряда m = 50 кг. Определите скорость снаряда $v'_{сн}$ относительно Земли и скорость снаряда u относительно платформы, если скорость платформы после выстрела $v'_п$ = 14 км/ч.

Дано: $v_п$ = 20 км/ч = 5,56 м/с; M = 10 т = 10^4 кг; m = 50 кг; $v'_п$ = 14 км/ч = 3,89 м/с.

Найти: $v'_{сн}$; u.

Решение. Согласно закону сохранения импульса,

$$\vec{p}_п+\vec{p}_{сн}=\vec{p}\,'_п+\vec{p}\,'_{сн},$$

где $\vec{p}_п$ и $\vec{p}\,'_п$ — соответственно импульс платформы до и после выстрела; $\vec{p}_{сн}$, $\vec{p}\,'_{сн}$ — соответственно импульс снаряда до и после выстрела, причем $\vec{p}_{сн}=0$.

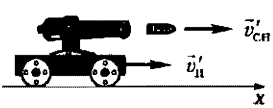


Рис. 47

В проекции на первоначальное направление движения платформы закон сохранения импульса имеет вид

$$(M+m)v_п=Mv'_п+mv'_{сн},$$

откуда искомая скорость снаряда относительно Земли

$$\boxed{v'_{\text{сн}} = \frac{(M+m)v_{\text{п}} - Mv'_{\text{п}}}{m}}$$

Согласно правилу сложения скоростей в классической механике, искомая скорость снаряда u относительно платформы

$$\boxed{u = v'_{\text{сн}} - v'_{\text{п}}}$$

Ответ: $v'_{\text{сн}} = 338$ м/с, $u = 334$ м/с.

2 Тело массой $m = 0{,}7$ кг брошено под некоторым углом α к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 200$ м/с. За первые четыре секунды движения сила тяжести совершает работу $A = 2\,500$ Дж. Определите угол α.

Дано: $m = 0{,}7$ кг; $v_0 = 200$ м/с; $t_1 = 4$ с; $A = 2\,500$ Дж.

Найти: α.

Решение. Сила $m\vec{g}$, действующая на тело, совершает работу

$$A = mgl\cos\beta,$$

где l — перемещение тела; β — угол между силой и перемещением.

Согласно рис. 48,

$$A = mgl\cos\beta = -mgl\sin(\beta - \pi/2) = mgy_1 < 0.$$

Кинематическое уравнение в проекции на ось y (см. решение задачи 8, гл. 1) имеет вид

$$y_1 = v_{0y}t_1 - \frac{gt_1^2}{2}.$$

Учитывая, что $v_{0y} = v_{0y}\sin\alpha$, имеем

$$|A| = mg\left(v_0 t_1 \sin\alpha - \frac{gt_1^2}{2}\right),$$

откуда

$$\boxed{\alpha = \arcsin\left(\frac{\dfrac{gt_1^2}{2} + \dfrac{A}{mg}}{v_0 t_1}\right)}$$

$$\left[\frac{(\text{м/с}^2)\cdot\text{с} + \dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{м/с}^2}}{(\text{м/с})\cdot\text{с}}\right] = \left[\frac{\text{м} + \dfrac{\text{кг}\cdot\text{м/с}^2\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{м/с}^2}}{\text{м}}\right] = 1.$$

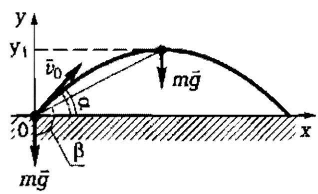


Рис. 48

Ответ: $\alpha = 33{,}6^\circ$.

3 Подъемный кран поднимает груз массой $m = 600$ кг с ускорением $a = 0{,}1$ м/с^2. Определите среднюю мощность крана за время от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 6$ с, если коэффициент полезного действия крана $\eta = 40$ %.

Дано: $m = 600$ кг; $a = 0{,}1$ м/с^2; $t_1 = 2$ с; $t_2 = 6$ с; $\eta = 0{,}4$.

Найти: $\langle N \rangle$.

Решение. Средняя мощность крана

$$\langle N \rangle = \frac{A_{\text{затр}}}{\Delta t} = \frac{A_{\text{затр}}}{t_2 - t_1}, \tag{1}$$

где $A_{\text{затр}}$ — затраченная работа.

КПД крана

$$\eta = \frac{A}{A_{\text{затр}}}, \tag{2}$$

где полезная работа A равна изменению энергии груза за промежуток времени $t_2 - t_1$:

$$A = E_2 - E_1 = \left(\frac{mv_2^2}{2} + mgh_2\right) - \left(\frac{m_1v_1^2}{2} + mgh_1\right), \tag{3}$$

где v_1 и v_2 — соответственно скорость груза в момент времени t_1 и t_2; h_1 и h_2 — высота, на которой находится груз в моменты времени t_1 и t_2. Учитывая, что

$$h = \frac{at^2}{2} \text{ и } v = at, \tag{4}$$

из выражения (3) найдем

$$A = \frac{ma(g+a)\left(t_2^2 - t_1^2\right)}{2}.$$

Подставляя (4) в (1) и учитывая (2), найдем искомую среднюю мощность

$$\boxed{\langle N \rangle = \frac{ma(g+a)(t_2 - t_1)}{2\eta}}$$

$$[\langle N \rangle] = \text{кг}\cdot\text{м}/(\text{с}^2)\cdot\text{м}/\text{с}^2\cdot\text{с} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}.$$

Ответ: $\langle N \rangle = 2{,}97$ кВт.

4 Груз массой $m = 50$ кг поднимают вдоль наклонной плоскости с ускорением $a = 1{,}5$ м/с^2. Длина наклонной плоскости $l =$ $= 2$ м, угол α ее наклона к горизонту равен 40°, коэффициент трения $\mu = 0{,}12$ (рис. 49). Определите работу A, совершаемую подъемным устройством; его среднюю $\langle N \rangle$ и максимальную N_{max} мощность. Начальная скорость груза равна нулю.

Дано: $m = 50$ кг; $a = 1{,}5$ м/с^2; $l = 2$ м; $\alpha = 40^\circ$; $\mu = 0{,}1$.

Найти: A; $\langle N \rangle$; N_{max}.

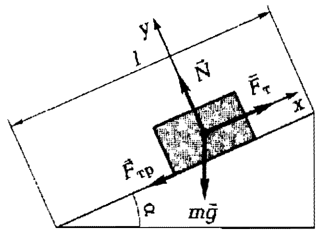


Рис. 49

Решение. Согласно второму закону Ньютона, уравнение движения груза по наклонной плоскости в векторной форме имеет вид

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_{т},$$

где $m\vec{g}$ — сила тяжести; $\vec{N}$ — сила реакции опоры; $\vec{F}_{тр}$ — сила трения; $\vec{F}_{т}$ — сила тяги.

В проекциях на оси x и y это уравнение запишется в виде

$$ma = F_{т} - mg\sin\alpha - \mu N,$$

$$0 = N - mg\cos\alpha$$

(учли, что $F_{тр} = \mu N$, где μ — коэффициент трения).

Решая систему уравнений относительно $F_{т}$, получаем

$$F_{т} = m(a + g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha).$$

Искомая работа, совершаемая подъемным устройством,

$$\boxed{A = F_{т}l = ml(a + g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha)}$$

Средняя мощность, развиваемая подъемным устройством,

$$\langle N \rangle = \frac{A}{t},$$

где $t = \sqrt{2l/a}$ — время подъема груза. Следовательно,

$$\boxed{\langle N \rangle = A\sqrt{\frac{a}{2l}}}$$

Максимальная мощность, развиваемая подъемным устройством,

$$N_{max} = F_{т}v_{max} = F_{т}at.$$

Подставляя значения величин, получим

$$\boxed{N_{max} = m\sqrt{2al}\left(a + g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha\right)}$$

$$[A] = кг \cdot м \cdot м/с^2 = Н \cdot м = Дж,$$

$$[\langle N\rangle] = \frac{\text{Дж}}{\sqrt{\dfrac{\text{м/с}^2}{\text{м}}}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт},$$

$$[N_{max}] = \text{кг}\sqrt{\text{м/(с}^2)\cdot\text{м}}\cdot\text{м/с}^2 = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}.$$

Ответ: A = 856 Дж; $\langle N\rangle$ = 524 Вт; N_{max} = 1,05 кВт.

5 С наклонной плоскости высотой h = 15 см и длиной l = 0,5 м скользит тело массой m = 0,5 кг (рис. 50). Считая коэффициент трения на всем пути одинаковым (μ = 0,03), определите кинетическую энергию $E_к$ у основания плоскости и путь s, пройденный телом на горизонтальном участке до остановки.

Дано: h = 15 см = 0,15 м; l = 0,5 м; m = 0,5 кг; μ = 0,03.

Найти: $E_к$; s.

Решение. При наличии сил трения полная механическая энергия тела уменьшается при переходе из состояния 1 в состояние 2:

$$E_2 - E_1 = A_{тр} < 0,$$

где $A_{тр}$ — работа силы трения (она отрицательна). Иначе можно записать

$$E_1 = E_2 + |A_{тр}|,$$

или в рассматриваемом случае

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + F_{тр}l, \qquad (1)$$

где $F_{тр}$ — сила трения, $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$ (μ — коэффициент трения; α — угол наклона плоскости к горизонту).

Из формулы (1) следует, что

$$\frac{mv^2}{2} = mgh - F_{тр}l = mgh - \mu mgl\cos\alpha$$

или

$$E_к = mgh - \mu mgl\cos\alpha.$$

Поскольку $h = l\sin\alpha$, имеем

$$\sin\alpha = \frac{h}{l}, \text{ а } \cos\alpha = \sqrt{1 - h^2/l^2}.$$

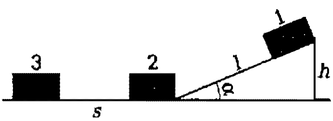


Рис. 50

Искомая кинетическая энергия тела у основания плоскости

$$E_к = mg\left(h - \mu l\sqrt{1 - h^2/l^2}\right).$$

Кинетическая энергия тела у основания плоскости расходуется на работу против сил трения на горизонтальной части пути:

$$E_3 - E_2 = A_{тр} < 0,$$

или

$$E_к = F_{тр}s = \mu mgs,$$

откуда искомый путь, пройденный телом на горизонтальном участке до остановки:

$$\boxed{s = \frac{E_к}{\mu mg}}$$

$$[E_к] = кг \cdot м/(с^2) \cdot м = Н \cdot м = Дж,$$

$$[s] = \frac{Дж}{кг \cdot м/с^2} = \frac{Дж}{Н} = \frac{Н \cdot м}{Н} = м.$$

Ответ: $E_к = 0{,}666$ Дж; $s = 4{,}53$ м.

6 Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите отношение кинетической $E_к$ и потенциальной $E_п$ энергий шарика, брошенного под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, в момент времени, когда его скорость будет составлять угол $\beta = 30°$ с горизонталью (рис. 51).

Дано: $\alpha = 45°$; $\beta = 30°$.

Найти: $\frac{E_к}{E_п}$.

Решение. Отношение энергий

$$\frac{E_к}{E_п} = \frac{E_к}{E - E_к}, \qquad (1)$$

где $E_к = \frac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия в произвольной точке; $E_п$ — потенциальная энергия в произвольной точке; $E = \frac{mv_0^2}{2}$ —

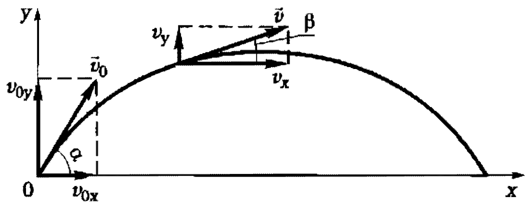


Рис. 51

полная энергия шарика в начальной точке, которая равна ее кинетической энергии.

Согласно закону сохранения энергии, для любой точки траектории

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mv^2}{2}. \qquad (2)$$

Скорость в любой точке траектории

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

где $v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha$; $v_y = v_x \operatorname{tg}\beta$, откуда

$$v^2 = v_0^2(1 + \operatorname{tg}^2\beta)\cos^2\alpha.$$

Закон сохранения энергии (1) запишем в виде

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mv_0^2\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\beta)}{2}. \qquad (3)$$

Искомое отношение (1) с учетом (2) и (3) принимает вид

$$\boxed{\frac{E_к}{E_п} = \frac{\dfrac{mv^2}{2}}{\dfrac{mv_0^2}{2} - \dfrac{mv^2}{2}} = \frac{\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\beta)}{1-\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\beta)}}$$

Ответ: $\dfrac{E_к}{E_п} = 2.$

7 Длина пружины в нерастянутом состоянии $l = 10$ см. Определите работу A силы упругости при сжатии пружины от длины $l_1 = 15$ см до длины $l_2 = 12$ см, если для удлинения пружины на $x = 1$ см затрачивается сила $F = 0{,}15$ Н.

Дано: $l = 10$ см $= 0{,}1$ м; $l_1 = 15$ см $= 0{,}15$ м; $l_2 = 12$ см $= 0{,}12$ м; $x = 1$ см $= 0{,}01$ м; $F = 0{,}15$ Н.

Найти: A.

Решение. Работа консервативных сил (силы упругости консервативны)

$$A = -\Delta E_п$$

или

$$A = E_{п_1} - E_{п_2}, \qquad (1)$$

$$E_{п_1} = \frac{k(l_1 - l)^2}{2} \text{ и } E_{п_2} = \frac{k(l_2 - l)^2}{2}, \qquad (2)$$

где k — жесткость пружины; $l_1 - l$ и $l_2 - l$ равны деформациям пружины.

Согласно закону Гука, $F_{упр} = -kx$. По третьему закону Ньютона, $F_{упр} = -F$, тогда

$$F = kx,$$

откуда

$$k = \frac{F}{x}. \qquad (3)$$

Подставив (2) в (1), учитывая (3) и произведя элементарные преобразования, найдем искомую работу силы упругости

$$\boxed{A = \frac{(l_1 - l_2)(l_1 + l_2 - 2l)F}{2x}}$$

$$[A] = \frac{\text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{Н}}{\text{м}} = \text{Дж}.$$

Ответ: A = 15,8 мДж.

8 Движущийся шар массой m_1 = 0,5 кг ударяется о неподвижный шар массой m_2 = 3 кг (рис. 52). Удар — абсолютно упругий, прямой и центральный. Определите долю γ первоначальной кинетической энергии, которую первый шар передаст второму при ударе.

Дано: m_1 = 0,5 кг; m_2 = 3 кг; $v_2 = 0$.

Найти: γ.

Решение. Искомая доля кинетической энергии, которую первый шар передает второму при ударе,

$$\gamma = \frac{E'_{к_2}}{E_{к_1}}, \qquad (1)$$

где $E'_{к_2} = \frac{m_2 v_2'^2}{2}$ — кинетическая энергия второго шара после удара (v_2' — скорость движения второго шара после удара); $E_{к_1} = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ — кинетическая энергия первого шара до удара (v_1 — скорость первого шара до удара).

При прямом центральном ударе векторы скоростей шаров до и после удара лежат на прямой линии, соединяющей их центры. Ось x выберем вдоль скорости $\vec{v}_1$. Проекции векторов скоростей на эту ось равны модулям скоростей, а направления учитываются знаками.

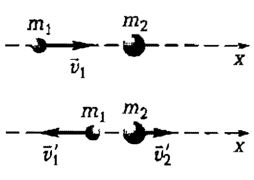


Рис. 52

Запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'; \qquad (2)$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1v_1'^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2}, \qquad (3)$$

где, согласно условию задачи, $v_2 = 0$; v_1' — скорость первого шара после удара.

Уравнения (2) и (3) запишем в виде

$$m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2';$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1v_1'^2}{2} + \frac{m_1v_2'^2}{2}.$$

Преобразуя эти уравнения, получаем

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2v_2';$$

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2v_2'^2, \qquad (4)$$

откуда после деления первого уравнения на второе имеем

$$v_1 + v_1' = v_2'. \qquad (5)$$

Решая уравнения (4) и (5), находим

$$v_2' = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2}. \qquad (6)$$

Подставив (6) в формулу (1) и учитывая выражения для $E_{к_2}'$ и $E_{к_1}$, найдем искомую долю:

$$\boxed{\gamma = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}}$$

Ответ: $\gamma = 0{,}49$.

9 Два свинцовых шара массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг подвешены на нитях длиной $l = 50$ см. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклонили на угол $\alpha = 60°$ и отпустили (рис. 53). Считая удар центральным и неупругим, определите высоту h, на которую поднимутся шары после удара. Найдите энергию $\Delta E_к$, израсходованную на деформацию шаров при ударе.

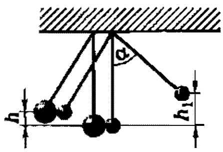


Рис. 53

Дано: $m_1 = 1$ кг; $m_2 = 2$ кг; $l = 50$ см $= 0{,}5$ м; $\alpha = 60°$.

Найти: h, $\Delta E_к$.

Решение. Удар неупругий, поэтому после удара шары движутся с общей скоростью v, которую найдем из закона сохранения импульса

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v, \qquad (1)$$

где v_1 и v_2 — скорости шаров до удара. Скорость v_1 малого шара найдем из закона сохранения механической энергии:

$$m_1 g h_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2},$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}, \qquad (2)$$

где $h_1 = l(1 - \cos\alpha)$.

Из выражений (1) и (2) при условии, что $v_2 = 0$, получим

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}}{m_1 + m_2}. \qquad (3)$$

Из закона сохранения механической энергии имеем

$$(m_1 + m_2)\frac{v^2}{2} = (m_1 + m_2)gh,$$

откуда искомая высота с учетом формулы (3)

$$\boxed{h = \frac{v^2}{2g} = \frac{2m_1^2 l \sin^2\frac{\alpha}{2}}{(m_1 + m_2)^2}}$$

Энергия, израсходованная на деформацию шаров при ударе,

$$\Delta E_к = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)}{2}v^2. \qquad (4)$$

Подставив (2) в (4), получаем искомую энергию

$$\boxed{\Delta E_к = 2gl\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$[\Delta E_к] = \frac{м/(с^2)\cdot м\cdot(кг)^2}{кг} = кг\cdot м/(с^2)\cdot м = Н\cdot м = Дж.$$

Ответ: $h = 2{,}78$ см; $\Delta E_к = 1{,}63$ Дж.

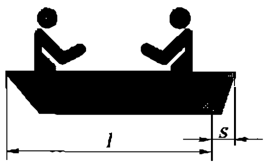


Рис. 55

1.147. Лодка длиной l = 6 м и массой M = 300 кг стоит в спокойной воде. На корме лодки сидит человек массой m = 80 кг. Пренебрегая трением о воду и воздух, определите, на какое расстояние s сместится лодка относительно берега, если человек, двигаясь с постоянной скоростью, перейдет на нос лодки (рис. 55). ***Ответ***: s = 1,26 м.

1.148. Снаряд, вылетевший из орудия под некоторым углом α к горизонту со скоростью v_0, разорвался в верхней точке на два осколка, причем масса первого в n = 1,6 раза меньше массы второго. Меньший из осколков полетел горизонтально в обратном направлении со скоростью v_1, равной скорости v снаряда до разрыва (рис. 56). Определите, на каком расстоянии s от орудия упадет больший осколок, если место разрыва отстоит от места выстрела по горизонтали на расстояние l = 1,5 км. Сопротивлением воздуха пренебречь. ***Ответ***: s = 4,86 км.

1.149. На тело массой m = 400 кг на горизонтальном участке пути s = 15 м действуют три силы: сила тяжести, сила трения (коэффициент трения μ = 0,2) и сила тяги F = 2 кН, направленная под углом α = 35° к горизонту. Определите работу A этих сил. ***Ответ***: $A_т$ = 0; $A_{тр}$ = –8,32 кДж; A = 24,6 кДж.

1.150. Автомобиль массой m = 2 т движется в гору, наклон которой составляет 2 м на каждые 100 м пути. Определите работу A, совершаемую двигателем автомобиля на пути s = 10 км, если коэффициент трения μ = 0,15. ***Ответ***: A = 33,3 МДж.

1.151. Определите работу A силы тяжести при движении тела массой m = 0,4 кг, брошенного под углом α = 35° к горизонту со скоростью v_0 = 140 м/с: 1) за первые пять секунд движения; 2) до верхней точки траектории. ***Ответ***: 1) A_1 = –1,09 кДж; 2) A_2 = –1,29 кДж.

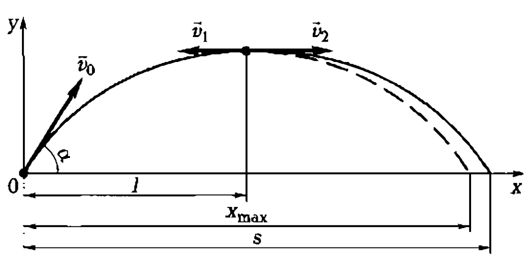


Рис. 56

1.152.* Определите работу A, совершаемую при вертикальном подъеме груза массой $m = 40$ кг на высоту $h = 15$ м с ускорением $a = 0{,}4$ м/с^2. ***Ответ***: $A = 6{,}13$ кДж.

1.153. Лошадь тянет сани, совершая работу $A = 35$ кДж на пути $s = 200$ м. Определите величину приложенной силы F, если оглобли составляют с горизонтом угол $\alpha = 40°$. ***Ответ***: $F = 229$ Н.

1.154. Лежащую на земле балку массой $m = 1{,}2$ т и длиной $l = 1{,}5$ м равномерно поднимают и устанавливают вертикально. Определите работу A силы тяжести. ***Ответ***: $A = -8{,}83$ кДж.

1.155. Тело массой $m = 6$ кг равномерно скользит по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 38°$ к горизонту. Определите работу силы тяжести A и работу силы трения $A_{тр}$, если высота плоскости $h = 1{,}5$ м, а коэффициент трения тела о плоскость $\mu = 0{,}3$. ***Ответ***: $A = 88{,}3$ Дж; $A_{тр} = -33{,}9$ Дж.

1.156. Автомобиль массой $m = 1{,}3$ т движется с постоянной скоростью. Определите мощность N, развиваемую двигателем автомобиля, если для прохождения расстояния $s = 10$ км автомобиль затрачивает время $t = 12$ мин. Коэффициент трения $\mu = 0{,}05$. ***Ответ***: $N = 8{,}86$ кВт.

1.157. Автомобиль, мощность двигателя которого постоянна и равна 100 кВт, поднимается в гору с наклоном $h/l = 0{,}2$ с постоянной скоростью 54 км/ч. Спускаясь с этой горы при выключенном двигателе, он движется равномерно с той же скоростью. Определите массу m автомобиля. ***Ответ***: $m = 1{,}7$ т.

1.158. Мощность двигателей самолета массой 6 т при отрыве от земли $P = 900$ кВт. Разгоняясь равноускоренно, самолет достигает скорости $v = 40$ м/с. Принимая, что коэффициент сопротивления $\mu = 0{,}04$ не зависит от скорости, определите длину s пробега самолета перед взлетом. ***Ответ***: $s = 238$ м.

1.159. На сжатую пружину положили шарик массой $m = 35$ г. После освобождения пружины шарик поднялся на высоту $h = 5$ м. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите жесткость k пружины, если она была сжата на $\Delta x = 15$ см. ***Ответ***: $k = 153$ Н/м.

1.160.* Материальная точка массой $m = 1{,}5$ кг движется под действием некоторой силы, направленной вдоль оси x, согласно уравнению $x = B + Ct + Dt^2$, где $B = 2$ м, $C = 3$ м/с, $D = 1$ м/с^2. Определите работу A силы, затрачиваемую на движение точки за время $t = 2$ с. Чему равна средняя мощность $\langle N \rangle$ силы за этот промежуток времени? ***Ответ***: $A = 35$ Дж; $\langle N \rangle = 18$ Вт.

1.161. Определите работу силы упругости A_{12} при сжатии пружины от длины $x_1 = 14$ см до длины $x_2 = 12$ см, если под действием силы $F = 1{,}5$ Н удлинение пружины составляет $\Delta x = 1$ см. ***Ответ***: $A_{12} = 0{,}39$ Дж.

1.162. Пружину медленно растягивают сначала от положения равновесия до удлинения $\Delta x_1 = 5$ см, затем от этого положения еще на $\Delta x_2 = 5$ см. Сравните произведенные при этом работы. ***Ответ***: $A_2/A_1 = 3$.

1.163. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите работу A силы тяжести при падении тела массой $m = 3$ кг, если скорость тела увеличилась от $v_1 = 2$ м/с до $v_2 = 20$ м/с. ***Ответ***: $A = 594$ Дж.

1.164. Автомобиль массой $m = 1\,100$ кг, двигаясь со скоростью $v = 70$ км/ч, при торможении прошел путь $s = 15$ м. Определите среднюю силу торможения $\langle F \rangle$. ***Ответ***: $\langle F \rangle = 13{,}9$ кН.

1.165. Конькобежец, разогнавшись на горизонтальном участке до скорости $v = 6{,}5$ м/с, смог, не прикладывая усилий, въехать на горку с уклоном $\alpha = 30^\circ$ на высоту $h = 2$ м. Определите коэффициент трения μ коньков о лед. ***Ответ***: $\mu = 0{,}045$.

1.166.* Тело движется под действием некоторой силы согласно уравнению $x = Bt^2$, где $B = 2$ м/с^2. Определите массу m тела, если на отрезке пути $x_1 = 50$ м совершается работа $A = 600$ Дж. ***Ответ***: $m = 3$ кг.

1.167. Автомобиль спускается с горы с уклоном $\alpha = 12^\circ$ при выключенном двигателе, при этом его скорость постоянна $v = 50$ км/ч. Определите мощность N двигателя, чтобы он смог преодолеть этот подъем с той же скоростью. Масса автомобиля $m = 1{,}2$ т. ***Ответ***: $N = 68$ кВт.

1.168. Груз массой $m = 120$ кг втаскивают с постоянным ускорением по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 20^\circ$ к горизонту на расстояние $l = 15$ м. Определите работу A силы тяги, если время подъема $t = 11$ с, коэффициент трения $\mu = 0{,}2$. Чему равен КПД η процесса? ***Ответ***: $A = 98$ кДж; $\eta = 0{,}616$.

1.169. С наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 35^\circ$ к горизонту скользят санки. Считая коэффициент трения μ на всем пути равным 0,02, определите высоту h наклонной плоскости, если санки проходят по горизонтальному участку до остановки расстояние $s = 23$ м. ***Ответ***: $h = 0{,}474$ м.

1.170. Автомобиль, двигаясь равноускоренно, разгоняется с места до 30 км/ч и с 30 км/ч до 60 км/ч за одно и то же время. Сравните работу двигателя в обоих случаях. Силу сопротивления $F_{сопр}$ считать постоянной. ***Ответ***: $A_1/A_2 = 0{,}333$.

1.171. С наклонной плоскости высотой $h = 6$ м и длиной $l = 15$ м скользит груз. Определите путь s по горизонтали, который пройдет груз до остановки, если коэффициент трения $\mu = 0{,}2$. ***Ответ***: $s = 6{,}25$ м.

1.172. Тело, двигаясь с ускорением $a = 1{,}5$ м/с, за время $t_1 = 8{,}2$ с приобрело кинетическую энергию $E_{к1} = 90$ Дж. Определите кинетическую энергию $E_к$ и импульс p тела через пять секунд после начала движения. ***Ответ***: $E_к = 33{,}5$ Дж; $p = 8{,}92$ кг·м/с.

1.173. За время $t_1 = 5$ с тело массой $m = 1{,}3$ кг, двигаясь равноускоренно, прошло путь $s_1 = 70$ м. Определите кинетическую энергию $E_{к2}$ тела в момент времени $t_2 = 3$ с. ***Ответ***: $E_{к2} = 183$ Дж.

1.174. Кинетическая энергия $E_{к1}$ тела массой $m = 6$ кг равна 200 Дж. Под действием некоторой силы F тело, двигаясь равноускоренно, за время $t = 6$ с приобрело энергию $E_{к2} = 340$ Дж. Определите ускорение a тела и силу F, действующую на тело. ***Ответ***: $a = 0{,}412$ м/с^2; $F = 2{,}47$ Н.

1.175. Шарик массой $m = 150$ г катился по горизонтальной поверхности со скоростью $v = 2{,}4$ м/с. Сможет ли он преодолеть горку высотой $h = 28$ см? Трением пренебречь. ***Ответ***: да.

1.176. Кинетическая энергия $E_к$ тела, движущегося со скоростью $v = 2{,}4$ м/с, равна 90 Дж. Определите потенциальную энергию $E_п$ этого тела на высоте $h = 15$ м над уровнем земли. ***Ответ***: $E_п = 4{,}6$ кДж.

1.177. Тело, падая с некоторой высоты, в момент соприкосновения с землей обладало импульсом $p = 100$ кг·м/с и кинетической энергией $E_к = 500$ Дж. Определите массу m тела и высоту h, с которой падало тело. ***Ответ***: $m = 10$ кг; $h = 5{,}1$ м.

1.178. Определите работу сил сопротивления $A_{тр}$, если тело, брошенное вертикально вверх с высоты $h = 12$ м со скоростью $v_0 = 5$ м/с, упало на землю со скоростью $v_1 = 14$ м/с. Масса тела $m = 0{,}5$ кг. ***Ответ***: $A_{тр} = -16{,}2$ Дж.

1.179. Определите отношение работы силы тяжести к работе силы, расходуемой на равномерный подъем тела по наклонной плоскости (коэффициент полезного действия η наклонной плоскости) с углом наклона $\alpha = 40°$ к горизонту и коэффициентом трения $\mu = 0{,}2$. ***Ответ***: $\eta = 0{,}808$.

1.180. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_0 = 15$ м/с. Определите, на какой высоте h потенциальная энергия $E_п$ тела в $n = 1{,}6$ раза больше кинетической $E_к$. Сопротивление воздуха не учитывать. ***Ответ***: $h = 7{,}06$ м.

1.181. Тело массой $m = 0{,}8$ кг падает с высоты $H = 20$ м без начальной скорости. Определите кинетическую $E_{к1}$ и потенциальную $E_{п1}$ энергии тела на высоте $h_1 = 6$ м. Сопротивление воздуха не учитывать. ***Ответ***: $E_{к1} = 110$ Дж; $E_{п1} = 47{,}1$ Дж.

1.182. Шарик массой $m = 0{,}5$ кг падает с высоты $h = 20$ м и вдавливается в землю на глубину $l = 12$ см. Определите среднюю силу сопротивления F_c почвы. Сопротивление воздуха не учитывать. ***Ответ***: $F_c = 822$ Н.

1.183. Автомобиль, двигающийся со скоростью $v = 80$ км/ч, после выключения двигателя проходит до остановки $s = 40$ м. Определите коэффициент трения μ. ***Ответ***: $\mu = 0{,}628$.

1.184. С башни высотой $H = 50$ м горизонтально брошено тело массой $m = 0{,}1$ кг со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите потенциальную $E_п$ и кинетическую $E_к$ энергии тела через промежуток времени $t = 1{,}5$ с после броска. ***Ответ***: $E_п = 38{,}2$, Дж; $E_к = 15{,}8$ Дж.

1.185. С башни высотой $H = 10$ м под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту брошено тело массой $m = 1{,}5$ кг со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите кинетическую $E_к$ и потенциальную $E_п$ энергии тела для момента времени $t = 2$ с. ***Ответ***: $E_к = 156$ Дж; $E_п = 66{,}5$ Дж.

1.186. Шарик массой $m = 50$ г, летящий со скоростью $v = 3{,}6$ м/с, ударился упруго о стенку под углом $\alpha = 35^\circ$ к горизонту. Определите изменение импульса Δp при ударе. ***Ответ***: $\Delta p = 0{,}295$ кг·м/с.

1.187. Шарик брошен под углом $\alpha = 42^\circ$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите отношение кинетической и потенциальной энергий $\frac{E_к}{E_п}$ шарика в момент времени, когда его скорость составляет с горизонталью угол: 1) $\beta_1 = 19^\circ$; 2) $\beta_2 = 0^\circ$. ***Ответ***: 1) $\frac{E_к}{E_п} = 1{,}61$; 2) $\frac{E_к}{E_п} = 1{,}23$.

1.188. Определите работу A, которую надо совершить, чтобы сжать пружину на $\Delta x = 8$ см, если известно, что под действием силы $F = 35$ Н пружина сжимается на $\Delta x_2 = 3$ см. ***Ответ***: $A = 7{,}47$ Дж.

1.189. Шар массой $m_1 = 1{,}3$ кг, движущийся со скоростью $v_1 = 2{,}5$ м/с, ударяется о неподвижный шар массой $m_2 = 2$ кг (см. рис. 52). Определите скорости шаров v_1' и v_2' после удара, считая удар центральным и абсолютно упругим. ***Ответ***: $v_1' = -0{,}53$ м/с; $v_2' = 1{,}97$ м/с.

1.190. Шар, движущийся со скоростью v_1, налетает на покоящийся шар, масса которого в $n = 2$ раза меньше массы первого. Определите отношение скоростей первого v_1' и второго v_2' шаров после удара, считая удар центральным, прямым и упругим. ***Ответ***: $v_1'/v_2' = 0{,}25$.

1.191. Пуля массой $m = 12$ г летит горизонтально и попадает в шар массой $M = 2{,}5$ кг, висящий на нити длиной $l = 120$ см, застревая в нем (рис. 57). Определите скорость v пули, если шар отклоняется на угол $\alpha = 10°$. ***Ответ***: $v = 125$ м/с.

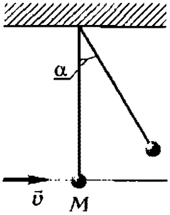


Рис. 57

1.192. Два соприкасающийся свинцовых шарика массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 300$ г подвешены на одинаковых длинных нитях. Меньший шарик отклонили на угол $\alpha = 40°$ и отпустили (см. рис. 53). Определите длину нитей l, если после удара шарики поднялись на высоту $h' = 4$ см. Удар считать центральным и неупругим. ***Ответ***: $l = 1{,}07$ м.

1.193. Пуля массой $m = 9$ г летит горизонтально со скоростью $v = 210$ м/с и попадает в брусок массой $M = 900$ г, висящий на нити длиной $l = 90$ см, застревая в нем. Определите угол α отклонения нити и количество теплоты Q, выделившееся при ударе. ***Ответ***: $\alpha = 41°$; $Q = 196$ Дж.

1.194. Шар массой $m_1 = 20$ г, летящий горизонтально, столкнулся с шаром массой $m_2 = 500$ г, висящим на жестком и невесомом стержне длиной $l = 50$ см. Считая удар центральным и упругим, определите скорость v_1 шара до удара, если угол отклонения стержня после удара $\alpha = 16°$. ***Ответ***: $v_1 = 8$ м/с.

1.195. Шар массой $m_1 = 2{,}5$ кг, движущийся со скоростью $v_1 = 3$ м/с, ударяется о неподвижный шар массой $m_2 = 1{,}5$ кг. Определите скорости v_1' и v_2' шаров после удара, считая удар центральным и абсолютно упругим. ***Ответ***: $v_1' = 0{,}75$ м/с; $v_2' = 3{,}75$ м/с.

Глава 4

Механические колебания и волны

Основные законы и формулы

■ Частота колебаний

$$\nu = \frac{1}{T}$$

[T — период колебаний].

■ Круговая (циклическая) частота колебаний

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

[T — период колебаний; ν — частота колебаний].

■ Уравнение гармонических колебаний

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

[x — смещение колеблющейся величины от положения равновесия; A — амплитуда колебаний; ω_0 — круговая (циклическая) частота; φ — начальная фаза].

■* Скорость и ускорение тела, совершающего гармонические колебания:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0\cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$$

[A — амплитуда колебаний; ω_0 — круговая частота; φ — начальная фаза].

■ Сила, действующая на колеблющееся тело массой m,

$$F = -m\omega_0^2 x$$

[ω_0 — круговая частота; x — смещение колеблющегося тела из положения равновесия].

■ Циклическая частота и период свободных гармонических колебаний пружинного маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

[k — жесткость пружины; m — масса пружинного маятника].

■ Циклическая частота и период свободных гармонических колебаний математического маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

[g — ускорение свободного падения; l — длина математического маятника].

■ Кинетическая энергия пружинного маятника (энергия движущегося груза) в отсутствие сил трения

$$E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

[m — масса груза; v — его скорость; A — амплитуда колебаний; ω_0 — круговая частота; φ — начальная фаза].

■ Потенциальная энергия пружинного маятника (энергия упругодеформированной пружины) в отсутствие сил трения

$$E_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

[m — масса груза; ω_0 — круговая частота; x — смещение груза от положения равновесия; A — амплитуда колебаний; φ — начальная фаза].

■ Полная механическая энергия пружинного маятника

$$E = E_к + E_п = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$$

[A — амплитуда колебаний; ω_0 — круговая частота].

■ Амплитуда и начальная фаза результирующего колебания, получающегося при сложении двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

[A_1 и A_2 — амплитуды складываемых колебаний; φ_1 и φ_2 — их начальные фазы].

■ Связь длины волны λ, периода T колебаний и частоты ν

$$\lambda = vT; \ v = \lambda\nu$$

[v — скорость распространения волны].

■ Связь между разностью фаз Δφ и разностью хода Δx

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x.$$

■ Уравнение плоской поперечной волны

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right]$$

[y — смещение точек среды с координатой x в момент времени t; A — амплитуда волны; φ — начальная фаза колебаний; v — скорость распространения волны].

■ Условие интерференционного максимума

$$d_2 - d_1 = 2k\frac{\lambda}{2} \ (k = 0, 1, 2, ...)$$

[($d_2 - d_1$) — разность хода волн; λ — длина волны].

■ Условие интерференционного минимума

$$d_2 - d_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \ (k = 0, 1, 2, ...)$$

[($d_2 - d_1$) — разность хода волн; λ — длина волны].

■ Уравнение стоячей волны в среде без затухания

$$y = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t$$

[A и ω — амплитуды и частоты двух плоских волн, распространяющихся навстречу друг другу вдоль оси x].

■ Координаты пучностей и узлов стоячей волны

$$x_{\text{п}} = \pm k\frac{\lambda}{2}; \ x_{\text{у}} = \pm\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \ (k = 0, 1, 2, ...)$$

Примеры решения задач

1 Запишите уравнение гармонических колебаний $x(t)$ материальной точки, совершающей колебания с амплитудой A = 10 см, если за время t = 1,5 мин совершается 180 колебаний. Начальная фаза колебаний φ = 45°.

Дано: A = 10 см = 0,1 м; t = 1,5 мин = 90 с; n = 180; φ = 45° = π/4.

Найти: $x(t)$.

Решение. Уравнение гармонических колебаний

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad (1)$$

где x — смещение колеблющейся точки от положения равновесия в момент времени t; A — амплитуда колебаний; ω_0 — круговая (циклическая) частота; φ — начальная фаза.

Круговая частота ω_0 и период T колебаний связаны соотношением

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Зная число n колебаний, совершающихся за время t, найдем период колебаний:

$$T = \frac{t}{n},$$

тогда

$$\omega_0 = \frac{2\pi n}{t} = 4\pi\ \text{с}^{-1}. \qquad (2)$$

Учитывая значение (2), искомое уравнение согласно формуле (1) запишем в виде

$$\boxed{x = 0{,}1\cos(4\pi t + \pi/4),\ \text{м}}$$

Ответ: $x = 0{,}1\cos(4\pi t + \pi/4)$, м.

2 Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 3$ см и частотой $\nu = 1$ Гц. Запишите уравнение движения точки $x(t)$, если ее движение начинается из положения $x_0 = 1{,}5$ см.

Дано: $A = 3$ см $= 3\cdot10^{-2}$ м; $\nu = 1$ Гц; $x_0 = 1{,}5$ см $= 1{,}5\cdot10^{-2}$ м.

Найти: $x(t)$.

Решение. Уравнение гармонических колебаний

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi). \qquad (1)$$

Циклическая частота ω_0 и частота колебаний ν связаны соотношением

$$\omega_0 = 2\pi\nu = 2\pi\ \text{с}^{-1}. \qquad (2)$$

Согласно условию задачи, в начальный момент времени $t = 0$ смещение точки из положения равновесия равно x_0, поэтому

$$x_0 = A\cos\varphi,$$

откуда начальная фаза

$$\varphi = \arccos\frac{x_0}{A} = \frac{\pi}{3}. \quad (3)$$

Учитывая значения (2) и (3), искомое уравнение, согласно формуле (1), запишем в виде

$$\boxed{x = 0{,}03\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right),\ \text{м}}$$

Ответ: $x = 0{,}03\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, м.

3* Материальная точка массой m = 15 г совершает гармонические колебания с частотой ν = 1 Гц. Амплитуда колебаний A = 8 см. Определите максимальную силу F_{max}, действующую на точку, и полную энергию E колеблющейся точки.

Дано: m = 15 г = $1{,}5\cdot10^{-2}$ кг; ν = 1 Гц; A = 8 см = $8\cdot10^{-2}$ м.

Найти: F_{max}, E.

Решение. Уравнение гармонических колебаний

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Тогда скорость и ускорение колеблющейся точки имеют соответственно вид

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi); \quad (1)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Согласно второму закону Ньютона, сила, действующая на точку,

$$F = ma = -mA\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi);$$

$F = F_{max}$ при $\cos(\omega_0 t + \varphi) = \pm1$, поэтому искомое максимальное значение силы

$$F_{max} = A\omega_0^2 m.$$

Так как циклическая частота

$$\omega_0 = 2\pi\nu,$$

искомая максимальная сила, действующая на материальную точку,

$$\boxed{F_{max} = 4\pi^2\nu^2 mA}$$

Полная энергия колеблющейся материальной точки

$$E = E_{к_{max}} = \frac{mv_{max}^2}{2}. \qquad (2)$$

Из формулы (1) следует, что $v = v_{max}$ при $\sin(\omega_0 t + \varphi) = \pm 1$, поэтому

$$v_{max} = A\omega_0.$$

Подставив это значение в формулу (2), найдем искомую полную энергию

$$\boxed{E = 2\pi^2 A^2 m\nu^2}$$

$$[F_{max}] = с^{-2} \cdot кг \cdot м = Н, \ [E] = м^2 \cdot кг \cdot с^{-2} = Н \cdot м = Дж.$$

Ответ: $F_{max} = 47{,}4$ мН; $E = 1{,}89$ мДж.

4 Период T_1 вертикальных колебаний груза, подвешенного к спиральной пружине, составляет 0,3 с. После подвешивания еще одного груза период колебаний T_2 возрос в 2,5 раза. Пренебрегая массой пружины, определите, на сколько удлинилась пружина Δx при подвешенном дополнительном грузе.

Дано: $T_1 = 0{,}3$ с; $T_2 = 2{,}5T_1$.

Найти: Δx.

Решение. Период колебаний первоначально подвешенного к пружине груза

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad (1)$$

где m — масса груза; k — жесткость пружины.

Период колебаний после увеличения массы груза на Δm

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m + \Delta m}{k}}. \qquad (2)$$

Грузы совершают гармонические колебания под действием упругой силы

$$F = k|\Delta x|, \qquad (3)$$

где F — сила, вызывающая удлинение пружины на Δx.

Сила

$$F = \Delta m\, g, \qquad (4)$$

где g — ускорение свободного падения.

Из формул (3) и (4) получаем

$$k = \frac{g\Delta m}{\Delta x}. \qquad (5)$$

Возведя выражения (1) и (2) в квадрат и вычитая одно из другого, получим

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2 \frac{\Delta m}{k} = 4\pi^2 \frac{\Delta x}{g}$$

[учли формулу (5)], откуда искомое удлинение пружины при добавлении груза

$$\boxed{\Delta x = \frac{g}{4\pi^2}\left(T_2^2 - T_1^2\right)}$$

$$[\Delta x] = \text{м}/(\text{с}^2)\cdot\text{с}^2 = \text{м}.$$

Ответ: $\Delta x = 11{,}8$ см.

5 С помощью метода векторных диаграмм, сложив два гармонических колебания, описываемых уравнениями $x_1(t) = 0{,}1\cos(2\pi t + \pi/6)$, м, и $x_2(t) = 0{,}1\cos(2\pi t + \pi/3)$, м, запишите уравнение $x(t)$ результирующего колебания.

Дано: $x_1(t) = 0{,}1\cos(2\pi t + \pi/6)$, м; $x_2(t) = 0{,}1\cos(2\pi t + \pi/3)$, м.

Найти: $x(t)$.

Решение. Согласно заданным в задаче уравнениям, складываемые гармонические колебания имеют одинаковые амплитуды и одинаковые циклические частоты:

$$A_1 = A_2 = 0{,}1 \text{ м};$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega = 2\pi \text{ с}^{-1}.$$

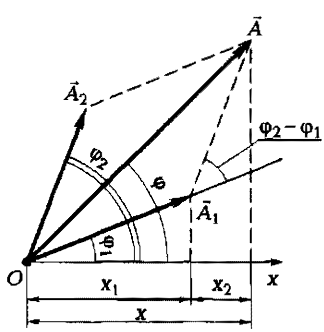


Рис. 58

Начальная фаза первого колебания $\varphi_1 = \pi/6$, второго — $\varphi_1 = \pi/3$.

Сложим колебания, воспользовавшись методом векторных диаграмм (рис. 58). Поскольку векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ вращаются с одинаковой угловой скоростью ω, равной циклической частоте колебаний, разность фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ между ними сохраняется постоянной

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi/6.$$

Результирующее колебание

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi), \qquad (1)$$

где

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi} = A_1\sqrt{2(1+\cos\Delta\varphi)}; \qquad (2)$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = \frac{\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2}{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2}. \qquad (3)$$

[В формулах (2) и (3) учли, что $A_1 = A_2$.]

Вычисляя, получаем: $A = 0{,}193$ м; $\mathrm{tg}\varphi = 1$, $\varphi = \mathrm{arctg}\,1 = \pi/4$. Используя полученные для A и φ данные, уравнение (1) можно записать в виде

$$x(t) = 19{,}3\cos(2\pi t + \pi/4), \qquad (4)$$

т. е. сумма двух гармонических колебаний одного направления с одинаковыми частотами является гармоническим колебанием (4) с той же частотой, а также амплитудой и фазой, определяемыми соответственно выражениями (2) и (3).

Ответ: $x(t) = 19{,}3\cos(2\pi t + \pi/4)$, м.

6 Плоская поперечная волна распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси x в среде, не поглощающей энергию, со скоростью $v = 24$ м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстояниях $x_1 = 6$ м и $x_2 = 7$ м от источника колебаний, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = \pi/6$. Амплитуда волны $A = 5$ см. Определите длину λ волны; уравнение волны $y = (x, t)$ и смещение y_1 первой трочки в момент времени $t = 4$ с.

Дано: $v = 24$ м/с; $x_1 = 6$ м; $x_2 = 7$ м; $A = 5$ см $= 0{,}05$ м; $\Delta\varphi = \pi/6$; $t = 4$ с.

Найти: λ; $y(x, t)$; y_1.

Решение. Разность фаз колебаний двух точек волны

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x,$$

где $\Delta x = x_2 - x_1$ — расстояние между этими точками.

Искомая длина волны

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\Delta\varphi}}$$

Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x,

$$y(x, t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right). \qquad (1)$$

Циклическая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi v}{\lambda} \qquad (2)$$

(учли, что $T = \lambda/v$). Принимая во внимание выражение (2), запишем искомое уравнение волны в общем виде

$$y(x, t) = A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x).$$

Чтобы найти смещение y_1, надо в это уравнение подставить значения t и x_1. Так как $\lambda = 12$ м, получим

$$\boxed{y(x, t) = 0{,}05\cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{6}x\right),\ \text{м}}$$

При $t = 4$ с имеем $y_1 = -5$ см.

Ответ: $\lambda = 12$ м; $y(x, t) = 0{,}05\cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{6}x\right)$, м; $y_1 = -5$ см.

7* Один конец упругого стержня соединен с источником гармонических колебаний, подчиняющихся закону $y = A\cos\omega t$, а другой его конец жестко закреплен. Учитывая, что отражение в месте закрепления стержня происходит от более плотной среды, запишите уравнение $y(x, t)$ стоящей волны.

Дано: $y = A\cos\omega t$.

Найти: $y(x, t)$.

Решение. Уравнение падающей волны

$$y_1 = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right), \qquad (1)$$

где A — амплитуда волны; ω — циклическая частота; v — скорость волны.

Согласно условию задачи, отражение в месте закрепления стержня происходит *от более плотной среды*, поэтому волна меняет фазу на противоположную, и уравнение отраженной волны имеет вид

$$y_2 = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \pi\right] = -A\cos\omega\left(t + \frac{x}{v}\right). \qquad (2)$$

Сложив уравнения (1) и (2), получим уравнение стоячей волны

$$y(x,t) = y_1 + y_2 = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{v}\right) - A\cos\left(\omega t + \frac{\omega t}{v}\right) =$$

$$= A\left[\cos\omega t\cos\frac{\omega x}{v} + \sin\omega t\sin\frac{\omega x}{v} - \right.$$

$$\left. - \cos\omega t\cos\frac{\omega x}{v} + \sin\omega t\sin\frac{\omega x}{v}\right] =$$

$$= 2A\sin\frac{\omega x}{v}\sin\omega t. \qquad (3)$$

Циклическая частота и длина волны соответственно равны

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}; \quad \lambda = vT,$$

тогда

$$\frac{\omega x}{v} = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{\lambda}x = \frac{2\pi}{\lambda}x.$$

Подставив последнее выражение в формулу (3), получим искомое уравнение стоячей волны

$$\boxed{y(x,t) = 2A\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\omega t}$$

Ответ: $y(x,t) = 2A\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\omega t$.

8 Два когерентных источника колеблются в одинаковых фазах с частотой $\nu = 60$ Гц. Скорость распространения волн в непоглощающей энергию среде $v = 420$ м/с. Определите наименьшую разность хода (не равную нулю), при которой наблюдаются максимальные усиление $(d_2 - d_1)_{max}$ и ослабление $(d_2 - d_1)_{min}$ колебаний.

Дано: $\nu = 60$ Гц; $v = 420$ м/с.

Найти: $(d_2 - d_1)_{max}$, $(d_2 - d_1)_{min}$.

Решение. Согласно условию задачи, происходит *наложение когерентных волн*, поэтому в разных точках пространства имеет место усиление или ослабление результирующей волны, т. е. наблюдается интерференция волн.

Максимальное усиление (интерференционный максимум) наблюдается при разности хода

$$d_2 - d_1 = 2k\frac{\lambda}{2} \;\; (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (1)$$

а максимальное ослабление (интерференционный минимум) — при разности хода

$$d_2 - d_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{2}$$

где длина волны

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu}. \tag{3}$$

Из выражений (1) и (2), учитывая (3), получаем искомые условия *наименьших* разностей хода (не равных нулю) для интерференционных максимума ($k = 1$) и минимума ($k = 0$)

$$\boxed{(d_2 - d_1)_{max} = \frac{\upsilon}{\nu}} \quad \boxed{(d_2 - d_1)_{min} = \frac{\upsilon}{2\nu}}$$

Ответ: $(d_2 - d_1)_{max} = 7$ м; $(d_2 - d_1)_{min} = 3{,}5$ м.

Задачи для самостоятельного решения

1.196. Материальная точка совершает гармонические колебания, описываемые уравнением $x = 0{,}1\cos(4\pi t + \pi/12)$, см. Определите амплитуду A колебаний, циклическую частоту ω_0, частоту ν, период T и начальную фазу φ колебаний. ***Ответ***: $A = 10$ см; $\omega_0 = 4\pi$ с$^{-1}$; $\nu = 2$ Гц; $T = 0{,}5$ с; $\varphi = \pi/12$.

1.197. Запишите уравнение гармонических колебаний материальной точки, если максимальное отклонение A от положения равновесия составляет 5 см и за время $t = 1{,}5$ мин совершается $N = 180$ колебаний. ***Ответ***: $x = 0{,}05\cos 4\pi t$, м.

1.198. Запишите уравнение гармонического движения материальной точки, совершающей колебания с амплитудой $A = 5$ см, если за время $t = 1$ мин совершается $N = 60$ полных колебаний, а начальная фаза колебаний $\varphi = 15^\circ$. ***Ответ***: $x(t) = 0{,}05\cos(2\pi t + \pi/12)$, м.

1.199. Материальная точка совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = A\sin\omega t$. Определите минимальное время t от начала колебаний, за которое смещение колеблющейся точки составит половину амплитуды, если период колебаний $T = 12$ с. ***Ответ***: $t = 1$ с.

1.200. Уравнение гармонического колебательного движения материальной точки имеет вид $x = 0{,}01\cos(2\pi t + \pi/8)$, м. Определите смещение материальной точки x_0 из положения равновесия в начальный момент времени и период колебаний T. ***Ответ***: $x_0 = 9{,}24$ мм; $T = 1$ с.

1.201. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 5$ см и циклической частотой $\omega_0 = 3\pi$ с$^{-1}$. Запишите уравнение движения точки, если ее движение начинается из положения $x_0 = 4{,}33$ см. ***Ответ***: $x(t) = 0{,}05\cos(3\pi t + \pi/6)$, м.

1.202. Материальная точка совершает гармонические колебания, описываемые уравнением $x = A\sin\omega t$. В какой-то момент времени смещение точки от положения равновесия $x_1 = 10$ см. При возрастании фазы колебания в два раза смещение $x_2 = 16$ см. Определите амплитуду A гармонических колебаний. ***Ответ***: $A = 16{,}7$ см.

1.203.* Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = 0{,}02\cos(\pi t + \pi/3)$, м. Определите скорость v и ускорение a материальной точки в момент времени $t = 2$ с. ***Ответ***: $v = -5{,}44$ см/с; $a = -9{,}86$ см/с^2.

1.204.* Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 3$ см и периодом $T = 2$ с. Определите для точки максимальную скорость v_{max}, максимальное ускорение a_{max}. ***Ответ***: $v_{max} = 9{,}42$ см/с; $a_{max} = 29{,}6$ см/с^2.

1.205.* Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = 0{,}04\cos(3\pi t + \pi/12)$, м. Определите скорость v и ускорение a в момент времени $t = 3$ с. ***Ответ***: $v = 3{,}25$ см/с; $a = 3{,}81$ см/с^2.

1.206.* Материальная точка совершает гармонические колебания с начальной фазой, равной нулю. В некоторый момент времени максимальная скорость материальной точки $v_{max} = 9{,}42$ см/с, а ее максимальное ускорение $a_{max} = 29{,}6$ см/с^2. Определите частоту ν колебаний. ***Ответ***: $\nu = 0{,}5$ Гц.

1.207. Тело массой $m = 200$ г, подвешенное к упругой пружине, совершает гармонические колебания. Определите жесткость k пружины, если за время $t =$ мин число полных колебаний $N = 200$. ***Ответ***: $k = 9{,}74$ Н/м.

1.208. Железный шарик, подвешенный к спиральной пружине, совершает вертикальные колебания. Определите, как изменится период T колебаний, если вместо железного шарика (плотность $\rho_1 = 7{,}9$ г/см^3) к пружине подвесить алюминиевый шарик (плотность $\rho_2 = 2{,}6$ г/см^3) такого же радиуса. ***Ответ***: $T_1/T_2 = 1{,}74$.

1.209. Если увеличить массу груза, подвешенного к спиральной пружине, на $\Delta m = 400$ г, то частота колебаний уменьшается в $n = 3$ раза. Определите массу m первоначального подвешенного груза. ***Ответ***: $m = 50$ г.

1.210. К спиральной пружине подвешен груз массой $m = 2$ кг. Определите период T вертикальных колебаний груза, если пружина под влиянием силы $F = 3$ Н растягивается на величину $\Delta x = 2$ см. ***Ответ***: $T = 0{,}726$ с.

1.211. Определите период T колебания груза на упругой пружине, если при его подвешивании пружина в положении равновесия удлинилась на $x_0 = 62{,}2$ мм. ***Ответ***: $T = 0{,}5$ с.

1.212. Математический маятник длиной $l = 99{,}4$ см за время $t = 1{,}5$ мин совершает $N = 45$ полных колебаний. Определите период T колебаний маятника и ускорение свободного падения g в месте нахождения маятника. ***Ответ***: $T = 2$ с; $g = 9{,}81$ м/с^2.

1.213. Определите отношение длин l_1/l_2 двух математических маятников, если периоды их колебаний отличаются в 2,5 раза. ***Ответ***: $l_1/l_2 = 6{,}25$.

1.214. Период колебаний одного математического маятника $T_1 = 3$ с, другого — $T_2 = 4$ с. Определите период T колебаний маятника, длина которого равна сумме длин обоих маятников. ***Ответ***: $T = 5$ с.

1.215.* Определите, во сколько раз изменится частота гармонических колебаний математического маятника при уменьшении его длины на 20 %. ***Ответ***: увеличится в 1,12 раза.

1.216. Два математических маятника, длины которых отличаются на $\Delta l = 32$ см, совершают за одно и то же время: один — $N_1 = 20$ колебаний, другой — $N_2 = 12$ колебаний. Определите длины l_1 и l_2 маятников. ***Ответ***: $l_1 = 18$ см; $l_2 = 50$ см.

1.217.* Материальная точка массой $m = 0{,}5$ кг совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 20$ см. Определите частоту ν колебаний, если максимальная сила F_{max}, действующая на материальную точку, равна 10 мН. ***Ответ***: $\nu = 0{,}504$ Гц.

1.218.* Определите полную энергию E материальной точки массой m, колеблющейся по закону $x = A\cos\omega t$. ***Ответ***: $E = \dfrac{mA^2\omega_0^2}{2}$.

1.219.* Материальная точка массой $m = 50$ г совершает гармонические колебания, описываемые уравнением $x = 0{,}3\cos 5\pi t$, м. Определите полную энергию E колеблющейся точки. ***Ответ***: $E = 555$ мДж.

1.220.* Материальная точка массой $m = 50$ г совершает гармонические колебания с периодом $T = 1$ с. Определите амплитуду A колебаний, если полная энергия колеблющейся материальной точки $E = 0{,}25$ мДж. ***Ответ***: $A = 15{,}9$ см.

1.221.* Материальная точка массой $m = 100$ г совершает гармонические колебания, описываемые уравнением $x = 0{,}3\cos 3\pi t$, м.

Определите полную энергию E колеблющейся материальной точки. ***Ответ***: E = 399 мДж.

1.222. Гиря, подвешенная к спиральной пружине, совершает вертикальные колебания с амплитудой A = 8 см. Определите полную энергию E гири, если жесткость пружины k = 500 Н/м. ***Ответ***: E = 1,6 Дж.

1.223. Груз подвешен к спиральной пружине жесткостью k = = 500 Н/м и совершает гармонические колебания. Определите амплитуду A колебаний груза, если максимальная кинетическая энергия груза $E_{\text{к}_{max}} = 0{,}9$ Дж. ***Ответ***: A = 6 см.

1.224.* Полная энергия E материальной точки, совершающей гармонические колебания, равна 6 мкДж, а максимальная возвращающая сила, действующая на точку, F_{max} = –0,3 мН. Запишите уравнение движения этой точки, если период T колебаний равен 6 с, а начальная фаза φ = 0. ***Ответ***: $x = 0{,}04\cos\frac{\pi}{3}t$, м.

1.225. Груз, подвешенный на спиральной пружине жесткостью k = 0,2 Н/см, совершает гармонические колебания с амплитудой A = 3 см. Определите массу m груза, если максимальная скорость груза v_{max} = 12 см/с. ***Ответ***: m = 1,25 кг.

1.226.* На горизонтальной пружине жесткостью k = 800 Н/м укреплен шар массой M = 3 кг, лежащий на гладком столе, по которому он может скользить без трения. Пуля массой m = 10 г, летящая с горизонтальной скоростью v_0 = 550 м/с и имеющая в момент удара скорость, направленную вдоль оси пружины, попала в шар и застряла в нем. Пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха, определите амплитуду A и период T колебаний шара. ***Ответ***: A = 11,2 см; T = 0,385 с.

1.227. Два одинаково направленных гармонических колебания одинаковой циклической частоты с амплитудами A_1 = 3 см и A_2 = 5 см имеют разность фаз $\Delta\varphi = 60°$. Определите амплитуду A результирующего колебания. ***Ответ***: A = 6,44 см.

1.228. Определите разность фаз $\Delta\varphi$ двух одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты и амплитуды, если амплитуда A их результирующего колебания равна 0,6 амплитуды складываемых колебаний. ***Ответ***: $\Delta\varphi = 145°$.

1.229. Разность фаз $\Delta\varphi$ двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода T = 2 с и одинаковой амплитуды A = 10 см составляет $\pi/4$. Запишите уравнение движения, получающееся в результате сложения этих колебаний, если начальная фаза первого колебания равна нулю. ***Ответ***: $x(t) = 18{,}5\cos(\pi t + \pi/8)$, см.

1.230. Складываются два гармонических колебания одного направления, описываемых уравнениями $x_1 = \cos 2\pi t$, см, и $x_2 = 3\cos(2\pi t + \pi/4)$, см. Определите для результирующего колебания амплитуду A, и начальную фазу φ. Запишите уравнение результирующего колебания и представьте векторную диаграмму сложения амплитуд. ***Ответ***: $A = 5{,}54$ см; $\varphi = \pi/8$; $x(t) = 5{,}54\cos(2\pi t + \pi/8)$, см.

1.231.* Результирующее колебание, получающееся при сложении двух гармонических колебаний одного направления, мало отличающихся по частоте, описывается уравнением вида $x(t) = A\cos t\cos 50t$. Определите циклические частоты ω_1, ω_2 складываемых колебаний. ***Ответ***: $\omega_1 = 51$ с$^{-1}$; $\omega_2 = 49$ с$^{-1}$.

1.232. Определите длину λ звуковой волны в воде (скорость звука в воде $v = 1\,450$ м/с), если частота ν источника колебаний составляет 725 Гц. ***Ответ***: $\lambda = 2$ м.

1.233. Определите скорость v распространения звука в воде, если длина волны $\lambda = 2{,}5$ м, а частота колебаний источника $\nu = 580$ Гц. Определите также наименьшее расстояние x между точками среды, которые колеблются в одинаковой фазе. ***Ответ***: $v = 1\,450$ м/с; $x = 2{,}5$ м.

1.234. Расстояние между двумя соседними гребнями волны в море составляет 80 см. Определите скорость v распространения волн, если за время $t = 15$ с поплавок совершает на волнах $N = 30$ колебаний. ***Ответ***: $v = 1{,}6$ м/с.

1.235. Определите разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, лежащих на луче на расстоянии $\Delta x = 0{,}5$ м друг от друга, если длина волны $\lambda = 4$ м. ***Ответ***: $\Delta\varphi = \pi/4$.

1.236. Скорость звука в воде $v = 1\,450$ м/с. Определите расстояние Δx, на котором находятся ближайшие точки, совершающие колебания в противоположных фазах, если частота колебаний $\nu = 580$ Гц. ***Ответ***: $\Delta x = 1{,}25$ м.

1.237. Определите, во сколько раз изменится длина ультразвуковой волны при переходе ее из меди в сталь, если скорость распространения ультразвука в меди и стали соответственно равны $v_1 = 3{,}6$ км/с и $v_2 = 5{,}5$ км/с. ***Ответ***: в 1,53 раза.

1.238. Звуковые колебания во второй среде имеют длину волны, вдвое меньшую, чем в первой. Определите, во сколько раз изменится скорость распространения звуковой волны при переходе из первой среды во вторую. ***Ответ***: $v_1/v_2 = 2$, т. е. в 2 раза.

1.239. Плоская поперечная волна распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси x в среде, не поглощающей энергию, со скоростью $v = 5$ м/с. Амплитуда колебаний точек среды $A = 10$ см, период колебаний $T = 2$ с. Запишите уравнение волны и определите длину волны λ. ***Ответ***: $y(x,t) = 0{,}1\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{5}x\right)$ м; $\lambda = 10$ м.

1.240.* Определите длину волны λ, если смещение y частицы из положения равновесия, которое находится от источника колебаний на расстоянии $x = 10$ см, через промежуток времени $t = T/3$ (T — период колебаний) равно половине амплитуды. ***Ответ***: $\lambda = 0{,}6$ м.

1.241. Определите разность фаз $\Delta\varphi$ двух точек, лежащих на луче и отстоящих друг от друга на расстоянии $\Delta x = 50$ см, если при частоте $\nu = 300$ Гц волна распространяется со скоростью $v = 150$ м/с. ***Ответ***: $\Delta\varphi = 2\pi$.

1.242. Человеческое ухо воспринимает звуки частотой от $v_1 = 16$ Гц до $v_2 = 20$ Гц. Определите длины волн λ_1 и λ_2, отвечающие этим частотам. Скорость звука в воздухе $v = 340$ м/с. ***Ответ***: $\lambda_1 = 21{,}2$ м; $\lambda_2 = 17$ мм.

1.243. Длина волны λ, возбуждаемой ультразвуковым генератором в алюминии при частоте $\nu = 100$ кГц, равна 5,2 см. Определите скорость v звука в алюминии. ***Ответ***: $v = 5{,}1$ км/с.

1.244. Два когерентных источника колеблются в одинаковых фазах с частотой $\nu = 500$ Гц. Определите, при какой наименьшей разности хода, не равной нулю, будет наблюдаться интерференционный максимум, если скорость распространения волн в непоглощающей энергию среде $v = 1$ км/с. ***Ответ***: $(d_2 - d_1)_{max} = 2$ м.

1.245. Два когерентных источника колеблются в одинаковых фазах с частотой $\nu = 500$ Гц. Определите, при какой наименьшей разности хода, не равной нулю, будет наблюдаться интерференционный минимум, если скорость распространения волн в непоглощающей энергию среде $v = 1$ км/с. ***Ответ***: $(d_2 - d_1)_{min} = 1$ м.

1.246. Разность хода $(d_2 - d_1)$ двух когерентных волн в данной точке составляет 4 м. Наблюдается в данной точке интерференционный максимум или минимум, если длина волны $\lambda = 2$ м? ***Ответ***: наблюдается интерференционный максимум.

1.247. От одного источника до рассматриваемой точки звук доходит за время $t_1 = 1$ с, от второго источника до этой же точки — за время $t_2 = 1{,}1$ с. Наблюдается в данной точке интерференционный максимум или минимум, если волны с длиной волны $\lambda = 8{,}5$ м когерентны, а скорость звука $v = 340$ м/с? ***Ответ***: наблюдается интерференционный максимум.

1.248.* Один конец упругого стержня соединен с источником гармонических колебаний, подчиняющихся закону

$y = A\cos\omega t$, а другой конец жестко закреплен. Учитывая, что отражение в месте закрепления стержня происходит от менее плотной среды, запишите уравнение стоящей волны. ***Ответ***: $y(x,t) = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t$.

1.249.* Найдите амплитуду $A_{ст}$ и выведите условие для координат пучностей и узлов стоящей волны, которая получается при сложении двух плоских волн, распространяющихся навстречу друг другу вдоль оси x без затухания. Амплитуды и частоты складываемых волн одинаковы, их начальные фазы равны нулю. ***Ответ***: $A_{ст} = \left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|$; $x_у = \pm\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), $x_п = \pm k\frac{\lambda}{2}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

1.250. Определите длину λ бегущей волны, если в стоячей волне расстояние между первой и пятой пучностями $\Delta l_{5,1}$ составляет 40 см. ***Ответ***: $\lambda = 20$ см.

1.251. Определите длину λ бегущей волны, если в стоячей волне расстояние между первым и восьмым узлами $\Delta l_{8,1}$ составляет 35 см. ***Ответ***: $\lambda = 10$ см.

1.252. Расстояние l между двумя соседними пучностями стоячей волны, создаваемой камертоном в воздухе, равно 40 см. Определите частоту ν колебаний камертона, если скорость звука в воздухе $\upsilon = 340$ м/с. ***Ответ***: $\nu = 425$ Гц.

Глава 5

Элементы специальной теории относительности

Основные законы и формулы

■ Преобразования Лоренца

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \ y' = y, \ z' = z, \ t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

[Предполагается, что система отсчета K' движется со скоростью v в положительном направлении оси x системы отсчета K, причем оси x' и x совпадают, а оси y' и y, z' и z параллельны; c — скорость распространения света в вакууме.]

■ Релятивистское замедление времени

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

[Δt_0 — промежуток времени между двумя событиями, отсчитанный движущимися вместе с телом часами; Δt — промежуток времени между теми же событиями, отсчитанный покоящимися часами].

■ Релятивистское (лоренцево) сокращение длины

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

[l_0 — длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой стержень покоится (собственная длина); l — длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой он движется со скоростью v].

■ Релятивистский закон сложения скоростей

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}}{1 - v_2 v/c^2}$$

[$\vec{v}_1$ — скорость тел относительно системы K'; $\vec{v}_2$ — скорость этого же тела относительно системы K; $\vec{v}$ — скорость движения системы K' относительно системы K; c — скорость распространения света в вакууме].

■ Релятивистский импульс частицы

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

[m — масса частицы; v — ее скорость (скорость v сравнима со скоростью c)].

■ Полная энергия релятивистской частицы

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

[m — масса частицы; v — ее скорость; c — скорость распространения света в вакууме].

■ Кинетическая энергия релятивистской частицы

$$E_к = E - E_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$$

[$E_0 = mc^2$ — энергия покоя (m — масса частицы; c — скорость распространения света в вакууме)].

■ Связь между энергией и импульсом релятивистской частицы

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2;$$

$$pc = \sqrt{E_к\left(E_к + 2mc^2\right)}.$$

Примеры решения задач

1 Космическая платформа движется со скоростью $v = 0{,}8c$ относительно наблюдателя. На платформе одновременно происходят два события в точках, расположенных на расстоянии $l_0 =$ $= 150$ м друг от друга. Определите промежуток времени Δt между этими событиями, отсчитанный по часам наблюдателя.

Дано: $v = 0{,}8c$; $l_0 = 150$ м; $t_2 = t_1 = t$.

Найти: $\Delta t'$.

Решение. Свяжем систему отсчета K с платформой, систему отсчета K' — с наблюдателем. По условию задачи, система отсчета K' движется относительно системы K со скоростью v в направлении, принятом за положительное.

Искомый промежуток времени

$$\Delta t' = t'_1 - t'_2, \qquad (1)$$

где t'_1 и t'_2 — показания синхронизированных часов в системе K', расположенных соответственно в точках x'_1 и x'_2, в те моменты времени, когда в каждой из точек произошло рассматриваемое событие.

Согласно преобразованиям Лоренца,

$$t'_1 = \frac{t_1 - vx_1/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \quad t'_2 = \frac{t_2 - vx_2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (2)$$

Подставив выражения (2) в формулу (1) и учитывая, что $t_2 = t_1 = t$ и $x_2 - x_1 = l_0$, найдем

$$\boxed{\Delta t' = \frac{l_0 v}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

Ответ: $\Delta t' = 0{,}667$ мкс.

2 Определите собственную длину l_0 стержня, если для наблюдателя, пролетающего со скоростью $v = 0{,}9c$, длина стержня $l = 1{,}2$ м (рис. 59).

Дано: $l = 1{,}2$ м; $v = 0{,}9$ с.

Найти: l_0.

Решение. Систему отсчета K' свяжем со стрежнем, систему отсчета K — с наблюдателем. Пусть система K' движется относительно системы K в положительном направлении оси Ox системы K (рис. 59) со скоростью v.

Собственная длина стержня

$$l_0 = x'_2 - x'_1. \qquad (1)$$

Согласно преобразованиям Лоренца, координаты концов стержня, измеренные в один и тот же момент времени t по часам данной системы:

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (2)$$

Подставив выражения (2) в формулу (1), найдем искомую собственную длину стержня:

$$l_0 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

$$\boxed{l_0 = \frac{l}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

Ответ: $l_0 = 2{,}75$ м.

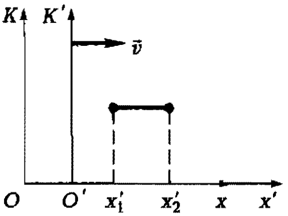


Рис. 59

3 С какой скоростью v тело должно лететь навстречу наблюдателю, чтобы его линейный размер уменьшился на 20 %?

Дано: $l = 0{,}8l_0$.

Найти: v.

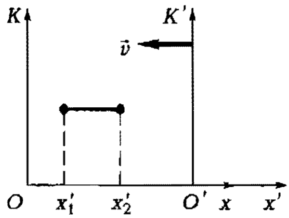


Рис. 60

Решение. Систему отсчета K' свяжем с телом. Тогда $x_2' - x_1' = l_0$ — собственные размеры тела вдоль направления движения (рис. 60).

Если систему K связать с наблюдателем, то размер тела в этой системе $l = x_2 - x_1$, причем координаты x_2 и x_1 должны быть измерены в один и тот же момент времени по часам системы K, т. е. $t_1 = t_2$. Учитывая взаимное направление движения систем K и K', преобразования Лоренца для координат запишем в виде

$$x_2' = \frac{x_2 + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad x_1' = \frac{x_1 + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

откуда

$$l_0 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

и искомая скорость

$$\boxed{v = c\sqrt{1 - \left(\frac{l}{l_0}\right)^2}}$$

Ответ: $v = 0{,}6c$.

4 Определите скорость v нестабильной частицы, если время ее жизни по часам наблюдателя с Земли увеличилось в $n = 1{,}88$ раза.

Дано: $\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = n$; $n = 1{,}88$.

Найти: v.

Решение. Систему отсчета K свяжем с частицей. Тогда промежуток времени между возникновением и распадом частицы в этой системе равен ее собственному времени жизни Δt_0. Поскольку система K движется вместе с частицей, эти события происходят в одной точке, что является необходимым условием применения формулы, описывающей релятивистское замедление хода часов.

Для системы K', связанной с Землей, время жизни частицы Δt. Тогда

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

откуда

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = n \qquad (1)$$

(учли условие задачи). Из выражения (1) находим искомую скорость

$$\boxed{v = c\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}$$

Ответ: $v = 0{,}847c$.

5 С космического корабля, приближающегося к Земле со скоростью $v = 0{,}7c$, по ходу движения корабля стартовала ракета со скоростью $v_1 = 0{,}6c$. С какой скоростью v_2 ракета приближается к Земле?

Дано: $v = 0{,}7c$; $v_1 = 0{,}6c$.

Найти: v_2.

Решение. Систему отсчета K свяжем с Землей, систему отсчета K' — с космическим кораблем (рис. 61). Тогда скорость ракеты v_2 в системе K и есть искомая скорость сближения. Согласно релятивистскому закону сложения скоростей, искомая скорость ракеты

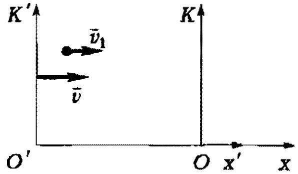


Рис. 61

$$\boxed{v_2 = \frac{v_1 + v}{1 + \frac{v_1 v}{c^2}}}$$

Ответ: $v_2 = 0{,}915c$.

6 Определите скорость v частицы, если ее полная энергия в $n = 1{,}7$ раза больше ее энергии покоя.

Дано: $\frac{E}{E_0} = n = 1{,}7$.

Найти: v.

Решение. Полная энергия частицы

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{1}$$

где m — масса частицы; v — ее скорость; c — скорость распространения света в вакууме.

Энергия покоя частицы

$$E_0 = mc^2. \tag{2}$$

Согласно формулам (1) и (2),

$$\frac{E}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = n$$

(учли условие задачи), откуда искомая скорость частицы

$$\boxed{v = c\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}$$

Ответ: $v = 0{,}809c$.

7 Определите релятивистский импульс p частицы, если ее полная энергия $E = 1{,}5$ ГэВ, а скорость $v = 0{,}65c$.

Дано: $E = 1{,}5$ ГэВ $= 2{,}4 \cdot 10^{-10}$ Дж; $v = 0{,}65c$.

Найти: p.

Решение. Релятивистский импульс частицы

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{1}$$

где m — масса частицы; v — ее скорость.

Умножив правую часть выражения (1) на c^2, получим искомый импульс:

$$\boxed{p = \frac{mvc^2}{\left(\sqrt{1 - v^2/c^2}\right)c^2} = \frac{Ev}{c^2}}$$

(учли, что полная энергия $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$)

$$[p] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{м/с}}{\text{м}^2/\text{с}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}} \cdot \text{с} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}} \cdot \text{с} = \text{Н} \cdot \text{с}.$$

Ответ: $p = 0{,}52 \cdot 10^{-18}$ Н·с.

8 Определите кинетическую энергию $E_к$ протона, если его релятивистский импульс $p = 2 \cdot 10^{-18}$ Н·с.

Дано: $p = 2 \cdot 10^{-18}$ Н·с; $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Найти: $E_к$.

Решение. Релятивистский импульс протона

$$p = \frac{m_p v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (1)$$

где m_p — масса протона; v — его скорость.

Кинетическая энергия релятивистского протона

$$E_к = m_p c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right). \qquad (2)$$

Из выражений (1) и (2) найдем связь между кинетической энергией и релятивистским импульсом протона

$$pc = \sqrt{E_к \left(E_к + 2m_p c^2 \right)},$$

откуда искомая кинетическая энергия протона

$$\boxed{E_к = m_p c^2 + \sqrt{m_p^2 c^4 + p^2 c^2}}$$

$$[E_к] = кг \cdot м^2/с^2 + \sqrt{кг^2 \cdot м^4/с^4 + кг^2 \cdot м^2/(с)^2 \cdot м^2/с^2} =$$

$$= Н \cdot м + \sqrt{Н^2 \cdot м^2 + Н^2 \cdot м^2} = Дж.$$

Ответ: $E_к = 7,69 \cdot 10^{-10}$ Дж $= 4,81$ ГэВ.

Задачи для самостоятельного решения

1.253. Система отсчета K' движется относительно системы K со скоростью $0,2c$ (c — скорость света в вакууме) в положительном направлении оси Ox, причем оси Ox и $O'x'$ параллельны (рис. 62). Определите координату x' точки A в системе K' в момент времени $t = 2,5$ с после начала отсчета, если в системе K ее координата $x = 4 \cdot 10^8$ м. ***Ответ***: $x' = 2,55 \cdot 10^8$ м.

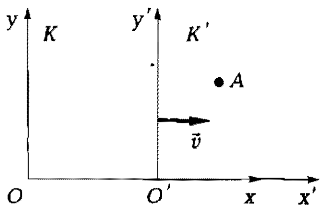


Рис. 62

1.254. Система отсчета K' движется относительно системы K со скоростью $v = 0,4c$ (c — скорость света в вакууме) в положительном направлении оси Ox, причем оси Ox и $O'x'$ параллельны (рис. 63). В момент времени $t = 10$ с по-

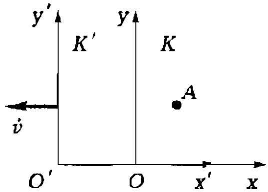


Рис. 63

сле начала отсчета в системе K произошли два события в точках с координатами $x_1 = 0$ и $x_2 = 10^8$ м. Определите, являются ли эти события одновременными в системе K'. ***Ответ***: $t_2 - t_1' = 0{,}2$ с; события неодновременны.

1.255. Система отсчета K' движется относительно системы K со скоростью $v = 0{,}8c$ (c — скорость света в вакууме) в отрицательном направлении оси Ox, причем оси Ox и $O'x'$ параллельны (см. рис. 63). Определите координату x' точки в системе K' в момент времени $t = 1$ ч после начала отсчета, если в системе K ее координата $x = = 10^{11}$ м. ***Ответ***: $x' = 1{,}91 \cdot 10^{12}$ м.

1.256. На космическом корабле, летящем со скоростью $v = 0{,}9c$ относительно Земли, происходят два события. Промежуток времени, отсчитанный по корабельным часам, $\Delta t = 3$ года. Определите промежуток времени $\Delta t'$, отсчитанный по часам, находящимся на Земле. ***Ответ***: $\Delta t' = 6{,}88$ года.

1.257. Определите длину l стержня для наблюдателя, пролетающего со скоростью $v = 0{,}6c$ (см. рис. 59), если собственная длина стержня $l_0 = 3$ м. ***Ответ***: $l = 2{,}4$ м.

1.258. Как изменится линейный размер l/l_0 стержня, летящего относительно наблюдателя со скоростью $v = 0{,}8c$ (см. рис. 59)? ***Ответ***: $l/l_0 = 0{,}6$; длина стержня уменьшится.

1.259. Определите скорость сближения v_1 микрочастиц, движущихся навстречу друг другу, каждая из которых имеет скорость $u = 0{,}7c$ относительно Земли. ***Ответ***: $v_1 = 0{,}94c$.

1.260. Две ракеты сближаются относительно неподвижных звезд со скоростями $u_1 = 0{,}7c$ и $u_2 = 0{,}8c$. Определите скорость v_1 их сближения (рис. 64). ***Ответ***: $v_1 = 0{,}96c$.

1.261. Два фотона движутся навстречу друг другу со скоростями, равными скорости света c относительно Земли. Определите скорость v_1 их сближения. ***Ответ***: $v_1 = c$.

1.262. С космического корабля, приближающегося к Земле, по ходу движения корабля стартовала ракета со скоростью $v_1 = 0{,}5c$. Определите скорость v корабля, если ракета приближается к Земле со скоростью $v_2 = 0{,}8c$. ***Ответ***: $v = = 0{,}5c$.

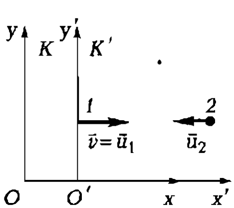


Рис. 64

1.263. Космический корабль движется со скоростью $v = 0{,}6c$ по направлению к Земле. Определите расстояние s, пройденное им в системе отсчета, связанной с Землей, за время $\Delta t_0 =$ $= 0{,}5$ с, отсчитанное по часам в космическом корабле. ***Ответ***: $s = 112$ Мм.

1.264. Определите относительную скорость v движения, при которой релятивистское сокращение линейных размеров тела составляет 20 %. ***Ответ***: $v = 1{,}8 \cdot 10^8$ м/с.

1.265. Скорость нестабильной частицы $v = 0{,}9c$. Определите, во сколько раз увеличилось время ее жизни по часам наблюдателя с Земли. ***Ответ***: в 2,3 раза.

1.266. Определите скорость v, при которой кинетическая энергия $E_к$ релятивистской частицы равна ее энергии покоя E_0. ***Ответ***: $v = 2{,}6 \cdot 10^8$ м/с.

1.267. Определите, на сколько процентов полная энергия E релятивистской частицы, вылетающей из ускорителя со скоростью $v = 0{,}8c$, больше ее энергии покоя E_0. ***Ответ***: на 66,7 %.

1.268. Определите работу A, которую надо совершить, чтобы увеличить скорость электрона от $v_1 = 0{,}6c$ до $v_2 = 0{,}85c$. Масса электрона $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг. ***Ответ***: $A = 1{,}93 \cdot 10^{-14}$ Дж.

1.269. Скорость релятивистской частицы $v = 0{,}7c$. Определите, во сколько раз полная энергия частицы E больше ее энергии покоя E_0. ***Ответ***: в 1,4 раза.

1.270. Определите релятивистский импульс p протона, движущегося со скоростью $v = 0{,}6c$. Массу протона m_p принять равной $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг. ***Ответ***: $p = 3{,}76 \cdot 10^{-19}$ кг·м/с.

1.271. Определите полную энергию E частицы, если ее релятивистский импульс $p = 10^{-16}$ кг·м/с, а скорость $v = 0{,}8c$. ***Ответ***: $E = 3{,}75 \cdot 10^{-8}$ Дж.

1.272. Определите кинетическую энергию $E_к$ электрона, если его скорость $v = 0{,}8c$. Масса электрона $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг. ***Ответ***: $E_к = 54{,}7 \cdot 10^{-15}$ Дж.

1.273. Определите скорость движения v частицы, если ее энергия покоя E_0 в 2,2 раза больше ее кинетической энергии $E_к$. ***Ответ***: $v = 0{,}726c$.

1.274. Определите релятивистский импульс p протона, если его полная энергия $E = 2 \cdot 10^{-12}$ Дж. Масса протона $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг. ***Ответ***: $p = 4{,}39 \cdot 10^{-19}$ кг·м/с.

1.275. Определите релятивистский импульс p электрона, если его кинетическая энергия $E_к = 10^{-13}$ Дж. Масса электрона $m_e =$ $= 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг. ***Ответ***: $p = 5{,}4 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с.

Раздел II

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Глава 6

Основы молекулярно-кинетической теории идеальных газов

Основные законы и формулы

■ Связь термодинамической температуры T и температуры t по Международной практической шкале (шкале Цельсия)

$$T = 273 + t.$$

■ Молярная масса

$$M = m_0 N_A$$

[m_0 — масса молекулы; N_A — постоянная Авогадро ($N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$)].

■ Молярный объем

$$V_m = \frac{V}{\nu}$$

[V — объем однородной системы; $\nu = m/M$ — количество вещества].

■ Закон Бойля — Мариотта

$$pV = \text{const} \ (T = \text{const}, \ m = \text{const})$$

[p — давление газа; V — объем газа; T — термодинамическая температура; m — масса газа].

■ Законы Гей-Люссака и Шарля

$$V = V_0(1 + \alpha t) \text{ или } \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \ (p = \text{const}, \ m = \text{const});$$

$$p = p_0(1 + \alpha t) \text{ или } \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \ (V = \text{const}, \ m = \text{const})$$

[t — температура газа по шкале Цельсия; V_0 и p_0 — соответственно объем и давление при 0 °С; коэффициент $\alpha = \frac{1}{273}$ К$^{-1}$; индексы 1 и 2 относятся к произвольным состояния газа].

■ Закон Дальтона для давления смеси n идеальных газов

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$$

[$p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ — парциальное давление каждого компонента смеси].

■ Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона — Менделеева)

$$pV_m = RT \text{ (для 1 моль газа),}$$

$$pV = \frac{m}{M}RT \text{ (для произвольной массы газа)}$$

[V_m — молярный объем; $R = 8{,}31$ Дж/(к · моль) — молярная газовая постоянная; M — молярная масса газа; m — масса газа; $\nu = m/M$ — количество вещества].

■ Зависимость давления газа от концентрации n молекул и температуры T

$$p = nkT$$

[$k = R/N_A$ — постоянная Больцмана ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К); N_A — постоянная Авогадро; R — молярная газовая постоянная].

■ Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов

$$p = \frac{1}{3}nm_0\langle v_{кв}\rangle^2,$$

или

$$pV = \frac{2}{3}N\frac{m_0\langle v_{кв}\rangle^2}{2} = \frac{2}{3}E,$$

или

$$pV = \frac{1}{3}Nm_0\langle v_{кв}\rangle^2 = \frac{1}{3}m\langle v_{кв}\rangle^2$$

[$\langle v_{кв}\rangle$ — средняя квадратичная скорость молекул; E — суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа; n — концентрация молекул; m_0 — масса одной молекулы; $m = Nm_0$ — масса газа; N — число молекул в объеме V газа].

■ Средняя квадратичная скорость молекул

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$$

[T — термодинамическая температура; m_0 — масса одной молекулы; $k = R/N_A$ — постоянная Больцмана].

■ Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2} = \frac{3}{2}kT$$

[m_0 — масса молекулы; $\langle v_{кв} \rangle$ — ее средняя квадратичная скорость; k — постоянная Больцмана].

■ Среднее число соударений, испытываемых молекулой газа за 1 с,

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle$$

[d — эффективный диаметр молекулы; n — концентрация молекул; $\langle v \rangle$ — средняя арифметическая скорость молекул].

■ Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$$

[d — эффективный диаметр молекулы; n — концентрация молекул; $\langle z \rangle$ — среднее число столкновений молекулы за 1 с; $\langle v \rangle$ — средняя арифметическая скорость молекул].

Примеры решения задач

1 Определите среднюю квадратичную скорость $v_{кв}$ молекул идеального газа, плотность ρ которого при давлении $p = 30$ кПа составляет 0,25 кг/м^3.

Дано: $p = 30$ кПа $= 3 \cdot 10^4$ Па; $\rho = 0{,}25$ кг/м^3.

Найти: $\langle v_{кв} \rangle$.

Решение. Согласно основному уравнению молекулярно-кинетической теории,

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{кв} \rangle^2, \tag{1}$$

где n — концентрация молекул; m_0 — масса одной молекулы; $\langle v_{кв} \rangle$ — средняя квадратичная скорость молекул.

Плотность газа

$$\rho = \frac{m}{V},$$

где масса газа

$$m = Nm_0$$

(N — число молекул в объеме V). Тогда

$$\rho = \frac{Nm_0}{V} = nm_0. \qquad (2)$$

Учитывая формулу (2), основное уравнение молекулярно-кинетической теории можно записать в виде

$$p = \frac{1}{3}\rho\langle v_{кв}\rangle^2,$$

откуда искомая средняя квадратичная скорость

$$\boxed{\langle v_{кв}\rangle = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}}$$

$$[\langle v_{кв}\rangle] = \sqrt{\frac{Па}{кг/м^3}} = \sqrt{\frac{Н/м^2}{кг/м^3}} = \sqrt{\frac{Н \cdot м}{кг}} = \sqrt{\frac{кг/(м \cdot с^2) \cdot м}{кг}} = м/с.$$

Ответ: $\langle v_{кв}\rangle = 600$ м/с.

2 Определите температуру T газа массой $m = 20$ г, если в нем содержится $N = 3{,}84 \cdot 10^{23}$ молекул и их средняя квадратичная скорость $\langle v_{кв}\rangle = 480$ м/с.

Дано: $m_0 = 20$ г $= 2 \cdot 10^{-2}$ кг; $N = 3{,}84 \cdot 10^{23}$; $\langle v_{кв}\rangle = 480$ м/с.
Найти: T.

Решение. Средняя квадратичная скорость молекул

$$\langle v_{кв}\rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

где $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) — молярная газовая постоянная; T — термодинамическая температура; M — молярная масса, откуда

$$T = \frac{\langle v_{кв}\rangle^2 M}{3R}. \qquad (1)$$

Число молекул

$$N = \nu N_А = \frac{m}{M}N_А,$$

где $\nu = \dfrac{m}{M}$ — количество вещества; $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро. Тогда молярная масса

$$M = \frac{mN_A}{N}. \qquad (2)$$

Подставляя выражение (2) в формулу (1), находим

$$T = \frac{mN_A \langle v_{кв} \rangle^2}{3RN}.$$

Учитывая, что $\dfrac{R}{N_A} = k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана, находим искомую температуру

$$\boxed{T = \frac{m\langle v_{кв} \rangle^2}{3kN}}$$

$$[T] = \frac{кг \cdot м^2/с^2}{Дж/К} = \frac{кг \cdot м^2/с^2}{Н \cdot м/К} = \frac{кг \cdot м^2/с^2 \cdot К}{кг \cdot м/(с^2) \cdot м} = К.$$

Ответ: $T = 290$ К.

3 В закрытом сосуде при температуре $T = 290$ К и давлении $p = 100$ кПа находятся водород массой $m_1 = 6$ г и гелий массой $m_2 = 12$ г. Считая газы идеальными, определите удельный объем $v_{см}$ смеси.

Дано: $T = 290$ К; $p = 100$ кПа $= 10^5$ Па; $m_1 = 6$ г $= 6 \cdot 10^{-3}$ кг; $M_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $m_2 = 12$ г $= 12 \cdot 10^{-3}$ кг; $M_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Найти: $v_{см}$.

Решение. Удельный объем смеси

$$v_{см} = \frac{V}{m_1 + m_2}, \qquad (1)$$

где V — объем сосуда.

Согласно закону Дальтона, давление p смеси газов равно сумме парциальных давлений

$$p = p_1 + p_2. \qquad (2)$$

Из уравнения Клапейрона — Менделеева имеем

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT \text{ и } p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT,$$

откуда

$$p_1 = \frac{m_1}{M_1}\frac{RT}{V} \text{ и } p_2 = \frac{m_2}{M_2}\frac{RT}{V}.$$

Подставив найденные выражения в (2), найдем

$$V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{p}. \qquad (3)$$

Учитывая выражение (3), из формулы (1) получим искомый удельный объем смеси

$$\boxed{v_{\text{см}} = \frac{\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)RT}{(m_1 + m_2)p}}$$

$$[v_{\text{см}}] = \left(\frac{\text{кг/кг/(моль)} \cdot \text{Дж/(моль} \cdot \text{К)} \cdot \text{К}}{\text{кг} \cdot \text{Па}}\right) = \frac{\text{Дж}}{\text{Па} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Н/(м}^2) \cdot \text{кг}} = \frac{\text{м}^3}{\text{кг}}.$$

Ответ: $v_{\text{см}} = 8{,}03$ м^3/кг.

4 Определите среднюю длину свободного пробега атомов гелия, если плотность ρ газа равна $2 \cdot 10^{-2}$ кг/м^3. Эффективный диаметр d молекулы гелия равен 0,22 нм.

Дано: $\rho = 2 \cdot 10^{-2}$ кг/м^3; $M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $d = 0{,}22$ нм $= 0{,}22 \cdot 10^{-9}$ м.

Найти: $\langle l \rangle$.

Решение. Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \qquad (1)$$

где n — концентрация молекул.

Плотность газа

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} \qquad (2)$$

(использовали уравнение Клапейрона—Менделеева $pV = \frac{m}{M}RT$).

Давление газа

$$p = nkT, \qquad (3)$$

где k — постоянная Больцмана; T — температура. Подставив выражение (3) в формулу (2) и выразив из (1) n, получаем искомую среднюю длину свободного пробега молекул

$$\langle l \rangle = \frac{kM}{\sqrt{2}\pi d^2 \rho R} = \frac{M}{\sqrt{2}\pi d^2 \rho N_A},$$

где учли, что $M = kN_A$ (N_A — постоянная Авогадро).

$$\boxed{\langle l \rangle = \frac{M}{\sqrt{2}\pi d^2 \rho N_A}}$$

$$[\langle l \rangle] = \frac{\text{кг/моль}}{\text{м}^2 \cdot \text{кг/(м}^3) \cdot \text{моль}^{-1}} = \text{м}.$$

Ответ: $\langle l \rangle$ = 1,55 мкм.

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Определите объем V, занимаемый ртутью количеством вещества $\nu = 40$ моль. Молярная масса ртути $M = 201 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, плотность $\rho = 13{,}6$ г/см^3. ***Ответ***: $V = 5{,}91 \cdot 10^{-4}$ м^3.

2.2. Масса m молекул $N = 2{,}15 \cdot 10^{27}$ некоторого газа равна 1 кг. Определите, что это за газ. ***Ответ***: $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; азот.

2.3. Определите число N молекул воды в стакане вместимостью $V = 100$ см^3. Молярная масса воды $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, плотность $\rho = 1$ г/см^3. ***Ответ***: $N = 3{,}34 \cdot 10^{24}$ молекул.

2.4. На зуб площадью $S = 0{,}08$ см^2 напылен слой золота толщиной $d = 1{,}4$ мкм. Определите число N атомов золота в покрытии. Молярная масса золота $M = 197 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, плотность $\rho = 19{,}3$ г/см^3. ***Ответ***: $N = 7{,}08 \cdot 10^{17}$.

2.5. Определите длину l цепочки, мысленно составленную из вплотную прилегающих друг к другу молекул кислорода, содержащихся в $m = 1$ г этого газа. Диаметр d молекулы кислорода принять равным 0,36 нм, молярная масса кислорода $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Сравните длину полученной цепочки со средним расстоянием от Земли до Солнца ($l' = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ м). ***Ответ***: $l = 6{,}77 \cdot 10^{12}$ м; $l/l' = 45{,}4$.

2.6. За сутки из сосуда испарилось $m = 20$ г воды. Определите, сколько молекул N_1 вылетело с поверхности воды за время $t_1 = 1$ с. Молярная масса воды $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. ***Ответ***: $N_1 = 7{,}74 \cdot 10^{18}$.

2.7. Определите молярный объем (объем 1 моль) V_m алюминия. Молярная масса алюминия $M = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, плотность $\rho = 2{,}7$ к/см^3. ***Ответ***: $V_m = 10^{-5}$ м^3/моль.

2.8. В некотором объеме имеется $M = 10^{20}$ молекул. Определите их среднюю арифметическую $\langle v \rangle$ и среднюю квадратичную $\langle v_{кв} \rangle$ скорости, если каждая четверть из них движется со скоростью $v_1 = 450$ м/с; $v_2 = 500$ м/с; $v_3 = 550$ м/с; $v_4 = 600$ м/с. ***Ответ***: $\langle v \rangle = 535$ м/с; $\langle v_{кв} \rangle = 528$ м/с.

2.9. Определите концентрацию n молекул азота, если при давлении $p = 0{,}1$ МПа средняя квадратичная скорость $\langle v_{кв} \rangle$ его молекул составляет 480 м/с. ***Ответ***: $n = 2{,}8 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

2.10. Газ массой $m = 2$ кг занимает объем $V = 15$ м^3 под давлением $p = 9$ кПа. Определите среднюю квадратичную скорость $\langle v_{кв} \rangle$ молекул газа. ***Ответ***: $\langle v_{кв} \rangle = 450$ м/с.

2.11. При нагревании газа в закрытом сосуде его давление возросло в четыре раза. Определите, во сколько раз увеличилась средняя квадратичная скорость $\langle v_{кв} \rangle$ его молекул. ***Ответ***: $\langle v_{кв} \rangle = \dfrac{\langle v_{кв_2} \rangle}{\langle v_{кв_1} \rangle} = 2$.

2.12. Определите среднюю квадратичную скорость $\langle v_{кв} \rangle$ молекул идеального газа, плотность которого при давлении 15 кПа составляет 0,1 кг/м^3. ***Ответ***: $\langle v_{кв} \rangle = 670$ м/с.

2.13. Начертите графики изотермического процесса ($T = \text{const}$) идеального газа в координатах p, V; p, T и V, T.

2.14. При изотермическом сжатии газа от объема $V_1 = 60$ см^3 до объема $V_2 = 40$ см^3 его давление увеличилось на $\Delta p = 1$ кПа. Определите первоначальное давление p_1. ***Ответ***: $p_1 = 2$ кПа.

2.15. Определите первоначальный объем V_1 газа, если в случае его медленного сжатия при постоянной температуре объем газа уменьшился на $\Delta V = 50$ см^3, а давление увеличилось в $n = 3$ раза. ***Ответ***: $V_1 = 75$ см^3.

2.16. Мальчик пьет воду из фляжки, плотно прижав ее к губам. Вместимость фляжки $V = 0{,}5$ л, вода занимает в ней объем $V_в = 0{,}2$ л. Сколько воды выпил мальчик, если давление оставшегося в ней воздуха понизилось на $\Delta p = 60$ кПа? Атмосферное давление $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па. ***Ответ***: $\Delta V_в = 0{,}044$ л.

2.17. Пузырек воздуха всплывает на поверхность воды со дна водоема глубиной $h = 3$ м. Определите объем V_2 пузырька у поверхности воды, если на дне водоема его объем $V_1 = 6$ мм^3. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3. ***Ответ***: $V_2 = 7{,}75$ мм^3.

2.18. Начертите графики изобарного процесса ($p = \text{const}$) для идеального газа в координатах p, V; p, T и V, T.

2.19. Определите начальную температуру T_1 идеального газа, если при изобарном нагревании на $\Delta T = 300$ К его объем увеличился в $n = 1{,}2$ раза. ***Ответ***: $T_1 = 1\,500$ К.

2.20. Определите, на сколько увеличился объем ΔV идеального газа, если при изобарном нагревании его температура возросла в $n = 1{,}5$ раза, а первоначальный объем $V_1 = 100$ см^3. ***Ответ***: $\Delta V = 50$ см^3.

2.21. Температура воздуха в цилиндре $T_1 = 300$ К. При изобарном нагревании на $\Delta T = 20$ К поршень переместился на $\Delta l = 3$ см.

Определите объем V_2 воздуха после нагревания, если площадь поршня $S = 15$ см^2. ***Ответ***: $V_2 = 7{,}2 \cdot 10^{-4}$ м^3.

2.22. Начертите графики изохорного процесса (V = const) для идеального газа в координатах p, V; p, T и V, T.

2.23. При нагревании газа в закрытом сосуде на $\Delta T = 160$ К его давление возросло в $n = 1{,}5$ раза. Определите начальную температуру T_1 газа. ***Ответ***: $T_1 = 320$ К.

2.24. Газ находился на складе в баллоне под давлением $p_1 = 2{,}8$ МПа при температуре $t_1 = 7\,^\circ$C. Израсходовав половину газа, баллон внесли в помещение. Какова температура этого помещения, если давление газа через некоторое время t_2 стало равным $p_2 = 1{,}5$ МПа? ***Ответ***: $t_2 = 27\,^\circ$C.

2.25. Бутылка, наполненная газом при нормальных условиях, закрыта пробкой площадью сечения $S = 3$ см^2. Чтобы пробка вылетела из бутылки, газ в ней надо нагреть на $\Delta T = 130$ К. Определите силу трения $F_{\text{тр}}$, которая удерживает пробку в бутылке. ***Ответ***: $F_{\text{тр}} = 14{,}4$ Н.

2.26. В баллоне вместимостью $V = 10$ л находится углекислый газ (CO_2). Определите массу m газа в баллоне, если давление газа $p = 100$ кПа, температура $T = 290$ К. ***Ответ***: $m = 18{,}3$ г.

2.27. Определите плотность ρ кислорода, который находится при температуре $T = 300$ К, если давление постоянно ($p = 0{,}1$ МПа). ***Ответ***: $\rho = 1{,}28$ кг/м^3.

2.28. Азот массой 7 г находится под давлением $p = 0{,}1$ МПа при температуре $T_1 = 290$ К. Вследствие изобарного нагревания азот занял объем $V_2 = 10$ л. Молярная масса азота $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Определите объем V_1 газа до расширения; температуру T_2 газа после расширения; плотность газа до и после расширения. ***Ответ***: $V_1 = 6{,}02 \cdot 10^{-3}$ м^3; $T_2 = 481$ К; $\rho_1 = 1{,}16$ кг/м^3; $\rho_2 = 0{,}7$ кг/м^3.

2.29. В баллоне вместимостью $V = 15$ л под давлением $p_1 = 100$ кПа находится углекислый газ при температуре $T_1 = 300$ К. Из баллона выпустили $m = 15$ г газа, причем температура в баллоне понизилась до $T_2 = 290$ К. Молярная масса углекислого газа $M = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Определите давление p_2 углекислого газа, оставшегося в баллоне. ***Ответ***: $p_2 = 41{,}9$ кПа.

2.30. В баллоне находится газ массой $m_1 = 100$ г. Определите массу Δm вытекшего газа, если из-за его утечки давление в баллоне уменьшилось в $n = 1{,}5$ раза. ***Ответ***: $\Delta m = 33{,}3$ г.

2.31. В объеме $V = 20$ м^3 при температуре $T = 300$ К под давлением $p = 100$ кПа находится азот. Определите количество вещества ν газа и число молекул в газе. ***Ответ***: $\nu = 802$ моль; $N = 4{,}83 \cdot 10^{26}$.

2.32. В сосуде находится смесь водорода массой $m_1 = 6$ г и гелия массой $m_2 = 12$ г. Молярная масса водорода $M_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; гелия $M_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Определите молярную массу газовой смеси в сосуде. ***Ответ***: $M = 3 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

2.33. В закрытом сосуде вместимостью $V = 15$ л находятся водород массой $m_1 = 5$ г и гелий массой $m_2 = 10$ г. Считая газы идеальными, определите давление p газовой смеси в сосуде, если ее температура $T = 290$ К. Молярная масса водорода $M_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; гелия $M_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. ***Ответ***: $p = 0{,}803$ МПа.

2.34. Определите плотность смеси газов гелия массой $m_1 = 10$ г и водорода массой $m_2 = 5$ г при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 100$ кПа. Молярная масса водорода $M_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; гелия $M_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Газы считать идеальными. ***Ответ***: $\rho = 0{,}12$ кг/м^3.

2.35. В сосуде вместимостью 0,5 л находится азот массой $m = 1$ г. Определите концентрацию n молекул азота в сосуде. Молярная масса азота $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. ***Ответ***: $n = 4{,}3 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

2.36. В сосуде вместимостью $V = 10$ л при нормальных условиях находится кислород. Определите количество вещества ν, массу m кислорода и концентрацию n его молекул в сосуде. ***Ответ***: $\nu = 0{,}445$ моль; $m = 14{,}2$ г; $n = 2{,}68 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

2.37. Определите суммарную кинетическую энергию ε поступательного движения молекул газа, находящегося в сосуде вместимостью $V = 5$ л под давлением $p = 0{,}1$ МПа. ***Ответ***: $\varepsilon = 750$ Дж.

2.38. Определите суммарную кинетическую энергию ε поступательного движения молекул газа в объеме $V = 6$ л под давлением $p = 1$ кПа. ***Ответ***: $\varepsilon = 9$ Дж.

2.39. Средняя кинетическая энергия $\langle\varepsilon\rangle$ поступательного движения молекул кислорода, находящегося в баллоне вместимостью $V = 10$ л, равна 3 кДж, а средняя квадратичная скорость $\langle v_{кв}\rangle$ его молекул равна 1,6 км/с. Определите массу m кислорода в баллоне и давление p, под которым находится кислород. ***Ответ***: $m = 2{,}34$ г; $p = 200$ кПа.

2.40. Определите среднюю кинетическую энергию ε поступательного движения молекул в 1 моль и в 1 кг азота при температуре $T = 360$ К. Молярная масса азота $M = 28 \cdot 10^{3}$ кг/моль. ***Ответ***: $\langle\varepsilon_1\rangle = 4{,}49$ кДж/моль; $\langle\varepsilon_2\rangle = 160$ кДж.

2.41. Определите, во сколько раз отличаются средние квадратичные скорости $\langle v_{кв}\rangle$ молекул гелия и кислорода при одинаковых температурах. ***Ответ***: в 2,83 раза.

2.42. При какой температуре T средняя квадратичная скорость молекул азота была бы равна первой космической скорости v_I = = 7,9 км/с? ***Ответ***: T = 70,1 кК.

2.43. Определите число N молекул газа массой m = 50 г, если средняя квадратичная скорость $\langle v_{кв} \rangle$ при температуре T = 290 К равна 480 м/с. ***Ответ***: $N = 9{,}6 \cdot 10^{23}$.

2.44. Определите давление p, оказываемое газом на стенки сосуда, если плотность газа ρ = 0,02 кг/м^3, а средняя квадратичная скорость молекул газа $\langle v_{кв} \rangle$ = 486 м/с. ***Ответ***: p = 1,57 кПа.

2.45. Определите температуру T водорода, если средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ его молекул при давлении p = 0,5 Па равна 2,5 см. Диаметр d молекулы водорода принять равным 0,28 нм. ***Ответ***: T = 315 К.

2.46. Средняя длина свободного пробега $\langle l_0 \rangle$ молекул водорода при нормальных условиях равна 0,15 мкм. Определите среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ при давлении p = 10 мПа, если температура газа остается постоянной. ***Ответ***: $\langle l \rangle$ = 1,51 м.

2.47. Определите концентрацию n молекул и плотность ρ разреженного кислорода, если средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ = 15 см. Диаметр d молекулы кислорода принять равным 0,36 нм. ***Ответ***: $n = 1{,}16 \cdot 10^{20}$ м$^{-3}$; $\rho = 6{,}17 \cdot 10^{-6}$ кг/м^3.

2.48. Определите среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ атомов гелия, если плотность газа $\rho = 2 \cdot 10^{-2}$ кг/м^3, а диаметр d атома гелия равен 0,22 нм. Молярная масса гелия $M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. ***Ответ***: $\langle l \rangle$ = 1,55 мкм.

Глава 7

Основы термодинамики

Основные законы и формулы

■ Средняя кинетическая энергия поступательного движения, приходящаяся на одну степень свободы молекулы,

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{2}kT$$

[k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура].

■ Средняя энергия молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2}kT$$

[$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}}$ — сумма числа поступательных и числа вращательных степеней свободы молекулы].

■ Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{i}{2}kTN_{\text{A}} = \frac{i}{2}RT \text{ (для 1 моль газа);}$$

$$U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT = \nu\frac{i}{2}RT \text{ (для произвольной массы газа)}$$

[i — число степеней свободы; k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура; N_{A} — постоянная Авогадро; R — молярная газовая постоянная; m — масса газа; M — молярная масса; $\nu = m/M$ — количество вещества].

■ Первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A \quad \text{или} \quad \Delta U = A' + Q$$

[Q — количество теплоты, сообщенное системе или отданное ею; ΔU — изменение внутренней энергии системы; A — работа системы против внешних сил; A' — работа, совершаемая над системой].

■ Работа газа при изменении его объема на ΔV

$$A = p\Delta V$$

[p — давление газа].

■ Молярная и удельная теплоемкости

$$C_m = \frac{\Delta Q}{\nu \Delta T}, \quad c = \frac{\Delta Q}{m \Delta T}.$$

■ Связь между молярной C_m и удельной c теплоемкостями газа

$$C_m = cM$$

[M — молярная масса газа].

■ Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме

$$C_V = \frac{i}{2} R$$

[i — число степеней свободы].

■ Молярная теплоемкость газа при постоянном давлении

$$C_p = \frac{i+2}{2} R.$$

■ Изменение внутренней энергии идеального газа

$$\Delta U = \frac{m}{M} C_V \Delta T$$

[m — масса газа; M — его молярная масса; C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме].

■ Работа газа при изобарном процессе

$$A = p(V_2 - V_1), \ A = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1).$$

■ Работа газа при адиабатном процессе

$$A = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2)$$

[m — масса газа; M — молярная масса газа; C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме; T_1 и T_2 — начальная и конечная температуры газа].

■ Уравнение теплового баланса

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i$$

[Q — количество теплоты, которое данные тела получили или отдали в процессе теплообмена; ΔU_i — изменение внутренней энергии i-го тела в процессе теплообмена; n — число тел, участвующих в теплообмене].

■ Изменение внутренней энергии при нагревании или охлаждении

$$\Delta U = cm\Delta T$$

[c — удельная теплоемкость; m — масса тела; ΔT — изменение температуры].

■ Изменение внутренней энергии при плавлении или затвердевании

$$\Delta U = \lambda m$$

[λ — удельная теплота плавления; m — масса тела].

■ Изменение внутренней энергии при парообразовании или конденсации

$$\Delta U = rm$$

[r — удельная теплота парообразования; m — масса тела].

■ Изменение внутренней энергии при сгорании вещества

$$\Delta U = qm$$

[q — удельная теплота сгорания; m — масса тела].

■ Термический коэффициент полезного действия для кругового процесса (цикла)

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

[Q_1 — количество теплоты, полученное системой; Q_2 — количество теплоты, отданное системой; A — работа, совершаемая за цикл].

■ Термический коэффициент полезного действия цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

[T_1 — температура нагревателя; T_2 — температура холодильника].

Примеры решения задач

1 При изохорном нагревании азота объемом $V = 20$ л давление газа изменилось на $\Delta p = 10$ кПа. Определите количество теплоты Q, сообщенное газу (рис. 65).

Дано: $V = 20$ л $= 2 \cdot 10^{-2}$ м^3; $\Delta p = 10$ кПа $= 10^4$ Па.

Найти: Q.

Решение. Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты Q, сообщенное газу, расходуется на изменение

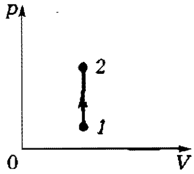


Рис. 65

внутренней энергии газа ΔU и совершение газом работы A против внешних сил

$$Q = \Delta U + A.$$

Работа газа в изохорном процессе ($V = \text{const}$)

$$A = p\Delta V = 0,$$

поэтому для изохорного процесса

$$Q = \Delta U. \qquad (1)$$

Изменение внутренней энергии произвольной массы m газа

$$\Delta U = \frac{m}{M}\cdot\frac{i}{2}R\Delta T, \qquad (2)$$

где i — число степеней свободы (для двухатомного газа — азота $i = 5$); R — молярная газовая постоянная.

Запишем уравнение Клапейрона — Менделеева для состояний газа *1* и *2*:

$$p_1V = \frac{m}{M}RT_1 \text{ и } p_2V = \frac{m}{M}RT_2,$$

откуда

$$V\Delta p = \frac{m}{M}R\Delta T \quad (\Delta T = T_2 - T_1,\ \Delta p = p_2 - p_1).$$

Тогда

$$\Delta T = \frac{MV\Delta p}{mR}. \qquad (3)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1) с учетом (3), найдем искомое количество теплоты, сообщенное газу:

$$Q = \frac{i}{2}V\Delta p = \frac{5}{2}V\Delta p.$$

$$\boxed{Q = \frac{5}{2}V\Delta p}$$

$$[Q] = \text{м}^3\cdot\text{Па} = \text{м}^3\cdot\text{Н/м}^2 = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж}.$$

Ответ: $Q = 500$ Дж.

2 Азот массой $m = 28$ г находится при температуре $t = 17\,^\circ\text{C}$. В результате изобарного расширения объем газа увеличился в два раза (рис. 66). Определите изменение внутренней энергии ΔU и работу расширения A газа, а также количество теплоты Q, сообщенное азоту. (Удельная теплоемкость азота $c = 1{,}05\cdot10^3$ Дж/(кг·К).)

Дано: $m = 28$ г $= 28 \cdot 10^{-3}$ кг; $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $t_1 = 17\,^\circ$C; $T_1 = (273 + 17) = 290$ К; $p = \text{const}$; $V_2 = 2V_1$; $c = 1{,}05 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

Найти: ΔU, A, Q.

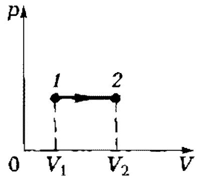


Рис. 66

Решение. Изменение внутренней энергии газа массой m при его нагревании от температуры T_1 до температуры T_2

$$\Delta U = mc(T_2 - T_1), \qquad (1)$$

где c — удельная теплоемкость.

Расширение газа происходит при постоянном давлении, поэтому, используя закон Гей-Люссака $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ и условие задачи $V_2 = 2V_1$, найдем конечную температуру азота

$$T_2 = \frac{V_2 T_1}{V_1} = \frac{2V_1 T_1}{V_1} = 2T_1. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), получим

$$\Delta U = mc(2T_1 - T_1) = mcT_1.$$

$$\boxed{\Delta U = mcT_1}$$

Найдем работу изобарного расширения, учитывая условие задачи ($V_2 = 2V_1$),

$$A = p(V_2 - V_1) = p(2V_1 - V_1) = pV_1. \qquad (3)$$

Согласно уравнению Клапейрона — Менделеева,

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1,$$

откуда $V_1 = \frac{mRT_1}{pM}$. Подставляя это выражение в формулу (3), находим искомую работу расширения газа

$$\boxed{A = \frac{m}{M} RT_1}$$

Сообщенное газу количество теплоты, согласно первому началу термодинамики,

$$\boxed{Q = \Delta U + A}$$

$$[\Delta U] = \text{кг} \cdot \text{Дж/(кг} \cdot \text{К)} \cdot \text{К} = \text{Дж},$$

$$[A] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж/(моль} \cdot \text{К)} \cdot \text{К}}{\text{кг/моль}} = \text{Дж}.$$

Ответ: $\Delta U = 8{,}53$ кДж; $A = 2{,}41$ кДж; $Q = 10{,}9$ кДж.

3 Многоатомный идеальный газ из одного и того же состояния расширяется один раз при постоянной температуре, другой раз — при постоянном давлении. В обоих случаях работа расширения газа одинакова. Начертите графики этих процессов. В каком из рассматриваемых процессов и во сколько раз количество подведенной к газу теплоты больше?

Дано: $T = \text{const}$; $p = \text{const}$.

Найти: Q_2/Q_1.

Решение. Согласно условию задачи, работа расширения газа в обоих процессах одинакова, поэтому площади под изотермой *1* → *2* и изобатой *1* → *2′* одинаковы (рис. 67).

Согласно первому началу термодинамики,

$$Q = \Delta U + A, \tag{1}$$

где ΔU — изменение внутренней энергии газа в процессе его расширения; A — работа расширения газа.

В случае изотермического процесса ($T = \text{const}$)

$$\Delta U = \frac{m}{M} C_V \Delta T = 0.$$

Тогда, на основании (1),

$$Q_1 = A. \tag{2}$$

В случае изобарного процесса ($p = \text{const}$)

$$\Delta U = \frac{m}{M} C_V \Delta T = \frac{m}{M} \cdot \frac{i}{2} R \Delta T = \frac{m}{M} \cdot \frac{i}{2} R \frac{MA}{mR} = \frac{iA}{2}. \tag{3}$$

(Учли, что работа расширения газа в случае изобарного процесса $A = \frac{m}{M} R \Delta T$, откуда $\Delta T = \frac{MA}{mR}$.)

Подставив выражение (3) в формулу (1), найдем

$$Q_2 = \frac{iA}{2} + A = \frac{i+2}{2} A. \tag{4}$$

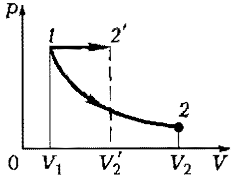


Рис. 67

Сравнив выражения (2) и (4), видим, что количество подведенной к газу теплоты больше в случае изобарного процесса.

$$\boxed{\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{i+2}{2}}$$

Ответ: $Q_2/Q_1 = 4$.

4 В сосуде, теплоемкость[1] которого $C_1 = 0{,}6$ кДж/К, находится $V_2 = 0{,}5$ л воды и $m_3 = 300$ г льда при $t_3^{пл} = 0\,°C$. Определите, какая температура θ установится после впуска в воду $m_4 = 100$ г водяного пара при температуре $t_3^{к} = 100\,°C$. Удельная теплота парообразования $r_4 = 2{,}26$ МДж/кг, удельная теплота плавления льда $\lambda_3 = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг, плотность воды $\rho_2 = 1$ г/см^3, удельная теплоемкость воды $c_2 = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

Дано: $C_1 = 0{,}6$ кДж/К $= 0{,}6 \cdot 10^3$ Дж/К; $V_2 = 0{,}5$ л $= 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м^3; $m_3 = 300$ г $= 0{,}3$ кг; $m_4 = 100$ г $= 0{,}1$ кг; $t_3^{пл} = 0\,°C$; $T_3^{пл} = 273$ К; $t_3^{к} = 100\,°C$; $T_3^{к} = 373$ К; $r_4 = 2{,}26$ МДж/кг $= 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг; $\lambda_3 = 3{,}36 \cdot 10^5$ Дж/кг; $\rho_2 = 1$ г/см$^3 = 1\,000$ кг/м^3; $c_2 = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

Найти: θ.

Решение. Результат теплообмена неизвестен, поэтому предположим, что температура всех тел после окончания теплообмена будет θ, причем она больше температуры плавления льда, но меньше температуры кипения воды.

Сосуд и вода нагрелись, получив соответственно количество теплоты:

$$Q_1 = C_1(\theta - T_3^{пл}), \tag{1}$$

$$Q_2 = c_2 m_2(\theta - T_3^{пл}) = c_2 \rho_2 V_2(\theta - T_3^{пл}), \tag{2}$$

где $m_2 = \rho_2 V_2$.

Лед расплавился, а вода нагрелась, получив количество теплоты

$$Q_3 = \lambda_3 m_3 + c_2 m_3(\theta - T_3^{пл}). \tag{3}$$

При конденсации пара образовавшаяся жидкость охладилась, отдав количество теплоты

$$Q_4 = -r_4 m_4 + c_2 m_4(\theta - T_3^{к}). \tag{4}$$

Запишем уравнение теплового баланса

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0. \tag{5}$$

Подставив в формулу (5) выражения (1), (2), (3) и (4), имеем

$$C_1(\theta - T_3^{пл}) + c_2\rho_2 V_2(\theta - T_3^{пл}) + \lambda_3 m_3 + c_2 m_3(\theta - T_3^{пл}) - r_4 m_4 + \\ + c_2 m_4(\theta - T_3^{пл}) = 0,$$

откуда искомая установившаяся температура

[1] Теплоемкость C тела определяется количеством теплоты, которое необходимо сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один градус, и равна произведению удельной теплоемкости вещества на массу тела: $C = cm$.

$$\boxed{\theta=\frac{r_4m_4+C_1T_3^{\text{пл}}-\lambda_3m_3+c_2\left[m_4T_3^{\text{к}}+\left(\rho_2V_2+m_3\right)T_3^{\text{пл}}\right]}{C_1+c_2\left(\rho_2V_2+m_3+m_4\right)}},$$

$$[\theta]=\frac{\text{Дж/(кг)}\cdot\text{кг}+\text{Дж/(К)}\cdot\text{К}-\text{Дж/(кг)}\cdot\text{кг}+\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}\left[\text{кг}\cdot\text{К}+\left(\text{кг/(м}^3)\cdot\text{м}^3+\text{кг}\right)\cdot\text{К}\right]}{\text{Дж/К}+\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}\left(\text{кг/(м}^3)\cdot\text{м}^3+\text{кг}+\text{кг}\right)}=\text{К}.$$

Ответ: $\theta = 357$ К.

5 В идеальной тепловой машине Карно, работающей по обратному циклу (холодной машине), в качестве холодильника используется вода при $t_2 = 0\,^\circ\text{C}$, а в качестве нагревателя — вода при $t_1 = 100\,^\circ\text{C}$. Сколько воды следует заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар $m_1 = 100$ г воды в нагревателе? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}35\cdot10^5$ Дж/кг, удельная теплота парообразования $r = 2{,}26$ МДж/кг.

Дано: $t_1 = 100\,^\circ\text{C}$; $T_1 = 373$ К; $t_2 = 0\,^\circ\text{C}$; $T_2 = 273$ К; $m_1 = 100$ г $=$ $= 0{,}1$ кг; $\lambda = 3{,}35\cdot10^5$ Дж/кг; $r = 2{,}26$ МДж/кг $= 2{,}26\cdot10^6$ Дж/кг.

Найти: m_2.

Решение. Для испарения воды массой m_1 следует затратить количество теплоты

$$Q_1 = rm_1, \tag{1}$$

где r — удельная теплота парообразования воды. При замерзании воды массой m_2 выделяется количество теплоты

$$Q_2 = -\lambda m_2, \tag{2}$$

где λ — удельная теплота плавления льда.

Коэффициент полезного действия идеальной тепловой машины

$$\eta=\frac{|Q_1|-|Q_2|}{Q_1}=\frac{T_1-T_2}{T_1}, \tag{3}$$

где Q_1 — количество теплоты, полученное от нагревателя; Q_2 — количество теплоты, отданное холодильнику; T_1 — температура нагревателя; T_2 — температура холодильника.

Из выражения (3) находим

$$|Q_2|=|Q_1|\frac{T_2}{T_1}. \tag{4}$$

Подставив выражения (1) и (2) в формулу (4), получим

$$\lambda m_2=\frac{m_1rT_2}{T_1},$$

откуда искомое значение

$$\boxed{m_2 = \frac{m_1 r T_2}{\lambda T_1}}$$

$$[m_2] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж/(кг)} \cdot \text{К}}{\text{Дж/(кг)} \cdot \text{К}} = \text{кг}.$$

Ответ: $m_2 = 494$ г.

6 Идеальный газ в цикле Карно совершил работу $A = 500$ Дж. Температура T_1 нагревателя равна 470 К, температура T_2 холодильника 290 К. Определите КПД цикла и количество теплоты Q_2, отданное холодильнику за один цикл.

Дано: $A = 500$ Дж; $T_1 = 470$ К; $T_2 = 290$ К.

Найти: η; Q_2.

Решение. Коэффициент полезного действия цикла

$$\boxed{\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}}$$

Количество теплоты, отданное холодильнику,

$$Q_2 = Q_1 - A, \tag{1}$$

где Q_1 — количество теплоты, полученной от нагревателя, найдем из условия

$$\eta = \frac{A}{Q_1}.$$

Получаем

$$Q_1 = \frac{A}{\eta}$$

и, подставив последнее выражение в формулу (1), найдем искомое количество теплоты, отданное холодильнику за один цикл,

$$\boxed{Q_2 = \left(\frac{1}{\eta} - 1\right) A}$$

Ответ: $\eta = 0{,}383$; $Q_2 = 806$ Дж.

Задачи для самостоятельного решения

2.49. Определите изменение внутренней энергии ΔU азота ($i = 5$) массой $m = 100$ г при его нагревании на $\Delta T = 50$ К. ***Ответ***: $\Delta U = 3{,}71$ кДж.

2.50. Определите внутреннюю энергию U молекул идеального одноатомного газа ($i = 3$) объемом $V = 20$ м^3 при давлении $p = 10$ кПа. ***Ответ***: $U = 0,3$ МДж.

2.51. Азот занимает объем $V = 200$ см^3 и находится под давлением $p = 10$ кПа. Определите внутреннюю энергию U газа, а также долю энергии, приходящейся на поступательное и вращательное движения молекул. ***Ответ***: $U = 5$ Дж; $U_п/U = 0,6$; $U_{вр}/U = 0,4$.

2.52. Как и во сколько раз отличаются внутренняя энергия гелия ($i = 3$) и кислорода ($i = 5$), если их температуры и массы одинаковы? ***Ответ***: в 4,8 раза.

2.53. Определите внутреннюю энергию U одноатомного газа ($i = 3$) количеством вещества $\nu = 5$ моль при температуре $t = 17\,^\circ$C. ***Ответ***: $U = 18,1$ кДж.

2.54. Свинцовая пуля (удельная теплоемкость свинца $c = 130$ Дж/(кг·К)) летит со скоростью $\upsilon = 250$ м/с и ударяется о землю. Определите, на сколько повысилась температура пули, если $\eta = 0,6$ кинетической энергии превратилось во внутреннюю энергию. ***Ответ***: $\Delta T = 144$ К.

2.55. Выведите связь между удельной c и молярной C теплоемкостями. ***Ответ***: $C = cM$.

2.56. Выведя формулу для молярной теплоемкости при постоянном объеме C_V, определите, во сколько раз C_V отличается для трех- и одноатомного газа. ***Ответ***: $C_V = \frac{i}{2}R$; $\frac{C_1V}{C_{3V}} = 2$.

2.57. Определите изменение внутренней энергии ΔU алюминия массой $m = 0,5$ кг в жидком и твердом состояниях. Удельная теплота плавления алюминия $\lambda = 380$ кДж/кг. ***Ответ***: $\Delta U = 190$ кДж.

2.58. Чтобы приготовить ванну (объем $V = 100$ л), смешивают холодную (температура $t_1 = 15\,^\circ$C) и горячую (температура $t_2 = 70\,^\circ$C) воду. Определите необходимые объемы холодной V_1 и горячей V_2 воды, чтобы получить температуру воды для принятия ванны $\theta = 37\,^\circ$C. ***Ответ***: $V_1 = 60$ л; $V_2 = 40$ л.

2.59. В калориметр из меди массой $m = 300$ г (удельная теплоемкость меди $c = 0,38$ кДж/(кг·К)), содержащий воду массой $m_в = 400$ г при температуре $t_в = 17\,^\circ$C, опускают кусочек льда массой $m_л = 20$ г, взятый при температуре $t_л = -10\,^\circ$C. Определите температуру θ воды в калориметре, когда лед растает. Принять удельную теплоемкость льда $c_л = 2,1$ кДж/(кг·К), удельную теплоту плавления льда $\lambda_л = 3,35 \cdot 10^5$ Дж/К, удельную теплоемкость воды $c_в = 4,19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К). ***Ответ***: $\theta = 268$ К.

2.60. Смесь, состоящую из воды массой $m_1 = 1{,}5$ кг и льда массой $m_2 = 200$ г, находящуюся при $t_0 = 0$ °С, следует нагреть до температуры $\theta = 38$ °С путем пропускания пара, температура которого $t = 100$ °С. Определите массу m_3 пара, необходимого для этого. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг. ***Ответ***: $m_3 = 0{,}134$ кг.

2.61. Определите массу m меди, взятой при температуре $t_0 = 17$ °С, которую можно расплавить за счет теплоты, получаемой при сгорании $m_1 = 100$ кг каменного угля, если КПД нагревателя $\eta = 0{,}3$. Удельная теплоемкость меди $c = 0{,}38$ кДж/(кг·К), температура плавления меди $t = 1\,083$ °С, удельная теплота сгорания каменного угля $q = 29$ МДж/кг, удельная теплота плавления меди $\lambda = 214$ кДж/кг. ***Ответ***: $m = 1{,}41$ т.

2.62. Определите скорость вылета v свинцовой пули из ружья (выстрел осуществлен вертикально вниз с высоты $h = 50$ м), чтобы при ударе о камень пуля расплавилась, если начальная температура пули $t_1 = 127$ °С и на нагревание и плавление пули пошло $\eta = 0{,}6$ ее механической энергии. Удельная теплоемкость свинца $c = 130$ Дж/(кг·К), температура плавления $t_{пл} = 327$ °С, удельная теплота плавления $\lambda = 25$ кДж/кг. ***Ответ***: $v = 414$ м/с.

2.63. При изохорном нагревании идеального газа ему сообщили количество теплоты $Q = 1$ кДж. Определите изменение внутренней энергии ΔU газа. ***Ответ***: $\Delta U = 1$ кДж.

2.64. Определите количество теплоты Q, сообщенное азоту, если в процессе изохорного нагревания ($V = 10$ л) его давление изменилось на $\Delta p = 50$ кПа. ***Ответ***: $Q = 1{,}25$ кДж.

2.65. При изохорном нагревании кислорода объемом $V = 5$ л ему было сообщено количество теплоты $Q = 1{,}5$ кДж Определите, на сколько изменилось давление Δp газа. ***Ответ***: $\Delta p = 0{,}12$ МПа.

2.66. Для нагревания газа массой $m = 5$ г на $\Delta T = 2$ К при постоянном объеме затрачивается количество теплоты $Q_V = 6{,}49$ Дж, при постоянном давлении $Q_p = 9{,}12$ Дж. Определите, что это за газ. ***Ответ***: $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; кислород.

2.67. Азот количеством вещества $\nu = 2$ моль нагревают при постоянном объеме. Определите количество теплоты Q, которое следует сообщить газу, чтобы его давление увеличилось в $n = 3$ раза. Начальная температура азота $T_1 = 300$ К, а его удельная теплоемкость при постоянном объеме $c_V = 742$ Дж/(кг·К). ***Ответ***: $Q = 24{,}9$ кДж.

2.68. Двухатомный ($i = 5$) идеальный газ ($\nu = 2$ моль) нагревают при постоянном объеме от температуры $T_1 = 300$ К. Определите количество теплоты Q, которое следует сообщить газу, чтобы увеличить его давление в $n = 2{,}5$ раза. ***Ответ***: $Q = 18{,}7$ кДж.

2.69. В медном сосуде массой $m = 0{,}8$ кг содержится $\nu = 2$ моль идеального двухатомного газа объемом $V = 200$ см^3. Определите изменение давления Δp газа, если ему сообщают количество теплоты $Q = 300$ Дж, не давая газу расширяться. Удельная теплоемкость меди $c = 380$ Дж/(кг·К). ***Ответ***: $\Delta p = 72{,}2$ кПа.

2.70. При изобарном нагревании ($p = 100$ кПа) идеального газа ему было сообщено количество теплоты $Q = 3$ кДж Определите изменение внутренней энергии ΔU газа, если его первоначальный объем увеличился на $\Delta V = 20$ л. ***Ответ***: $\Delta U = 1$ кДж.

2.71. Идеальный газ количеством вещества $\nu = 2$ моль изобарно нагрет на $\Delta T = 100$ К. Определите работу A, совершенную над газом при увеличении его объема. ***Ответ***: $A = 1{,}66$ кДж.

2.72. В результате изобарного расширения многоатомного идеального газа совершена работа $A = 10$ кДж. Определите изменение внутренней энергии ΔU газа и количество сообщенной ему теплоты Q. ***Ответ***: $\Delta U = 30$ кДж; $Q = 40$ кДж.

2.73. Двухатомный идеальный газ расширяется в результате изобарного процесса. Определите, во сколько раз количество теплоты Q, подведенное к газу, больше работы A, совершаемой газом при расширении. ***Ответ***: $Q/A = 3{,}5$.

2.74. Двухатомный идеальный газ расширяется в результате изобарного процесса. Определите работу расширения газа, если на его расширение затрачено количество теплоты $Q = 7$ кДж. ***Ответ***: $A = 2$ кДж.

2.75. Азот количеством вещества $\nu = 2$ моль нагревают при постоянном давлении. Определите количество теплоты Q, которое следует сообщить газу, чтобы его объем увеличился в $n = 3$ раза. Начальная температура газа $T_1 = 300$ К. Удельная теплоемкость азота при постоянном давлении $c_p = 1{,}04$ кДж/(кг·К). ***Ответ***: $Q = 34{,}9$ кДж.

2.76. Углекислый газ CO_2 массой $m = 20$ г нагрели на $\Delta T = 100$ К один раз при постоянном давлении, другой — при постоянном объеме. Определите, на сколько отличаются друг от друга количества сообщенных в этих процессах теплот. ***Ответ***: $Q_p - Q_V = 378$ Дж.

2.77. Кислород массой $m = 32$ г находится при температуре $T_1 = 290$ К. В результате изохорного охлаждения его давление уменьшилось в $n = 3$ раза, а затем в результате изобарного расширения температура газа в конечном состоянии оказалась равной первоначальной. Определите работу A, совершенную газом, и изменение внутренней энергии ΔU газа. ***Ответ***: $A = 1{,}61$ кДж; $\Delta U = 0$.

2.78. Определите количество теплоты Q, сообщенное идеальному газу, если при его изотермическом расширении совершена работа $A = 50$ Дж. ***Ответ***: $Q = 50$ Дж.

2.79. При адиабатном расширении идеального газа совершена работа $A = 10$ кДж. Определите изменение внутренней энергии ΔU газа. Газ нагревается или охлаждается? ***Ответ***: $\Delta U = 10$ кДж; газ охлаждается.

2.80. Определите работу A, совершенную над двухатомным газом количеством вещества $\nu = 5$ моль, если при адиабатном сжатии температура газа повысилась на $\Delta T = 60$ К. ***Ответ***: $A = -6{,}23$ кДж.

2.81. В результате адиабатного расширения кислорода массой $m = 5$ г температура газа изменилась на $\Delta T = 20$ К. Определите изменение внутренней энергии ΔU газа. ***Ответ***: $\Delta U = -64{,}9$ Дж.

2.82. При адиабатном сжатии одноатомного идеального газа количеством вещества $\nu = 2$ моль, находящегося при температуре $T_1 = 300$ К, его внутренняя энергия изменилась на $\Delta U = 1$ кДж. Определите температуру T_2 газа в конце процесса. ***Ответ***: $T_2 = 340$ К.

2.83. Температура пара, поступающего в паровую машину, $T_1 = 450$ К, температура в конденсаторе $T_2 = 300$ К. Определите максимально возможную работу A машины при затрате количества теплоты $Q = 3$ кДж. ***Ответ***: $A = 1$ кДж.

2.84. Идеальный газ совершает цикл Карно. Газ получил от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 6$ кДж и отдал холодильнику количество теплоты $Q_2 = 0{,}6Q_1$. Определите термический КПД η цикла и работу A, совершаемую за цикл. ***Ответ***: $\eta = 0{,}4$; $A = 2{,}4$ кДж.

2.85. Идеальный газ совершает цикл Карно. Газ получил от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 6$ кДж и совершил работу $A = 2{,}4$ кДж. Определите термический КПД η цикла и отношение температур нагревателя T_1 и холодильника T_2. ***Ответ***: $\eta = 0{,}4$; $T_1/T_2 = 1{,}67$.

2.86. Идеальный газ совершает цикл Карно, термический КПД которого $\eta = 0{,}6$. Определите работу A_2 изотермического сжатия газа, если работа A_1 изотермического расширения равна 600 Дж. ***Ответ***: $A_2 = -240$ Дж.

2.87. Идеальная тепловая машина «работает» по циклу Карно. Температуры нагревателя $T_1 = 400$ К, холодильника $T_2 = 270$ К. Определите работу A, совершаемую тепловой машиной, если в топке сожжено 200 кг топлива с удельной теплотой сгорания $q = 12{,}6 \cdot 10^3$ Дж/кг. ***Ответ***: $A = 2{,}66$ МДж.

Глава 8

Агрегатные состояния вещества. Жидкости и пары

Основные законы и формулы

■ Относительная влажность

$$\varphi = \frac{p}{p_н} \cdot 100\%$$

[p — парциальное давление водяного пара, содержащегося в воздухе при данной температуре; $p_н$ — давление насыщенного пара при той же температуре].

Таблица 8.1. Зависимость давления p и плотности ρ насыщенного водяного пара от температуры

t, °C	p, кПа	ρ, г/м³	t, °C	p, кПа	ρ, г/м³
–5	0,40	3,2	11	1,33	10,0
0	0,61	4,8	12	1,40	10,7
1	0,65	5,2	13	1,49	11,4
2	0,71	5,6	14	1,60	12,1
3	0,76	6,0	15	1,71	12,8
4	0,81	6,4	16	1,81	13,6
5	0,88	6,8	17	1,93	14,5
6	0,93	7,3	18	2,07	15,4
7	1,0	7,8	19	2,20	16,3
8	1,06	8,3	20	2,33	17,3
9	1,14	8,8	25	3,17	23,0
10	1,23	9,4	50	12,3	83,0

Таблица 8.2. Психрометрическая таблица

Показания сухого термометра, °С	Разность показателей сухого и влажного термометров, °С										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Относительная влажность, %										
0	100	81	63	45	28	11	—	—	—	—	—
2	100	84	68	51	35	20	—	—	—	—	—
4	100	85	70	56	42	28	14	—	—	—	—
6	100	86	73	60	47	35	23	10	—	—	—
8	100	87	75	63	51	40	28	18	7	—	—
10	100	88	76	65	54	44	34	24	14	5	—
12	100	89	78	68	57	48	38	29	20	11	—
14	100	89	79	70	60	51	42	34	25	17	9
16	100	90	81	71	62	54	46	37	30	22	15
18	100	91	82	73	65	56	49	41	34	27	20
20	100	91	83	74	66	59	51	44	37	30	24
22	100	92	83	76	68	61	54	47	40	34	28
24	100	92	84	77	69	62	56	49	43	37	31
26	100	92	85	78	71	64	58	51	46	40	34
28	100	93	85	78	72	65	59	53	48	42	37
30	100	93	86	79	73	67	61	55	50	44	39

■ Поверхностное натяжение

$$\sigma = \frac{F}{l}$$

[F — сила поверхностного натяжения, действующая на контур l, ограничивающий поверхность жидкости].

■ Высота подъема жидкости в капиллярной трубке

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}$$

[θ — краевой угол; r — радиус капилляра; ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения; σ — поверхностное натяжение].

■ Сила внутреннего трения между двумя движущимися слоями жидкости (газа) площадью S

$$F = \frac{\Delta v}{\Delta x} S$$

[η — коэффициент вязкости; отношение $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ показывает, как быстро меняется скорость при переходе от одного слоя к другому в направлении x, перпендикулярном направлению движения слоев].

Примеры решения задач

1 В комнате объемом $V = 150$ м^3 при температуре $t_1 = 20\,^\circ$C относительная влажность $\varphi = 51$ %. Определите массу m водяных паров в воздухе комнаты, если давление $p_н$ насыщенного водяного пара при данной температуре равно 2,33 кПа.

Дано: $V = 150$ м^3; $t = 20\,^\circ$C; $T = 293$ К; $\varphi = 51\ \% = 0{,}51$; $p_н = 2{,}33$ кПа $= 2{,}33 \cdot 10^3$ Па; $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Найти: m.

Решение. Так как $\varphi = 51\ \%$ ($< 100\ \%$), то в комнате пар ненасыщенный. Ненасыщенный пар подчиняется газовым законам. По закону Дальтона он занимает весь объем комнаты.

Согласно уравнению Клапейрона — Менделеева,

$$pV = \frac{m}{M_п} RT, \tag{1}$$

где давление пара определяется по формуле относительной влажности (температура постоянна, поэтому влажность пропорциональна давлению):

$$p = p_н \varphi, \tag{2}$$

где $p_н$ — давление насыщенного пара при рассматриваемой температуре.

Согласно выражениям (1) и (2), искомая масса водяного пара

$$m = \frac{pVM_п}{RT} = \frac{p_н \varphi V M_п}{RT}$$

$$\boxed{m = \frac{p_н \varphi V M_п}{RT}}$$

$$m = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{кг/моль}}{\text{Дж/(моль} \cdot \text{К)} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \text{кг}}{\text{Дж}} = \frac{\text{Н/(м}^2) \cdot \text{м}^3 \cdot \text{кг}}{\text{Н} \cdot \text{м}} = \text{кг}.$$

Ответ: $m = 1{,}32$ кг.

2 В комнате объемом $V = 100$ м^3 давление насыщенных паров при температуре $t = 20\,^\circ$С составляет 2,33 кПа, относительная влажность $\varphi_1 = 18\,\%$. Определите массу m воды, которую следует испарить, чтобы при той же температуре относительная влажность φ_2 достигла 40 %. Молярная масса водяного пара $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Дано: $V = 100$ м^3; $t = 20\,^\circ$С; $T = 293$ К; $p_н = 2{,}33$ кПа $= 2{,}33 \cdot 10^3$ Па; $\varphi_1 = 18\,\%$; $\varphi_2 = 40\,\%$; $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Найти: m.

Решение. Масса воды, которую следует испарить,

$$m = m_2 - m_1, \tag{1}$$

где m_1 и m_2 — масса воздуха в комнате при относительных влажностях соответственно φ_1 и φ_2;

$$m_1 = \rho_1 V \text{ и } m_2 = \rho_2 V, \tag{2}$$

где ρ_1 и ρ_2 — плотность воздуха соответственно при φ_1 и φ_2.

Относительная влажность воздуха

$$\varphi = \frac{p}{p_н} \cdot 100\%, \tag{3}$$

где p — давление водяных паров, находящихся в воздухе; $p_н$ — давление насыщенных паров при данной температуре.

Давление водяных паров определим из уравнения Клапейрона — Менделеева:

$$p = \frac{m}{V}\frac{RT}{M} = \rho\frac{RT}{M},$$

откуда, учитывая (3), получим

$$\rho = \frac{pM}{RT} = \frac{p_н M \varphi}{RT \cdot 100\%}. \tag{4}$$

Тогда, на основании (4),

$$\rho_1 = \frac{p_н M \varphi_1}{RT \cdot 100\%} \text{ и } \rho_2 = \frac{p_н M \varphi_2}{RT \cdot 100\%}. \tag{5}$$

Подставив выражения (5) в (2), найдем согласно формуле (1), искомую массу воды, которую следует испарить:

$$\boxed{m = \frac{p_н M V}{RT \cdot 100\%}(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$[m] = \frac{\text{Па} \cdot \text{кг/моль} \cdot \text{м}^3\%}{\text{Дж/(моль} \cdot \text{К)} \cdot \text{К}\%} = \frac{\text{Па} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{Дж}} = \frac{\text{Н/м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{Н} \cdot \text{м}} = \text{кг}.$$

Ответ: $m = 379$ г.

3 Определите, какую силу следует приложить к горизонтальному медному кольцу высотой 15 мм, внутренним диаметром 40 мм и внешним 42 мм, чтобы оторвать его от поверхности воды. Плотность меди $\rho = 8{,}93$ г/см^3; поверхностное натяжение воды $\sigma = 73$ мН/м.

Дано: $h = 15$ мм $= 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м; $d_1 = 40$ мм $= 4{,}0 \cdot 10^{-2}$ м; $d_2 =$ $= 42$ мм $= 4{,}2 \cdot 10^{-2}$ м; $\rho = 8{,}93$ г/см^3 $= 893$ кг/м^3; $\sigma = 73$ мН/м $=$ $= 73 \cdot 10^{-3}$ Н/м.

Найти: F.

Решение. Сила, которую следует приложить для отрыва кольца от поверхности воды,

$$F = F_1 + F_2, \tag{1}$$

где F_1 — вес кольца; F_2 — сила поверхностного натяжения.

Вес кольца

$$F_1 = \rho g h \cdot \frac{\pi}{4}\left(d_2^2 - d_1^2\right), \tag{2}$$

где g — ускорение свободного падения.

При отрыве кольца поверхностная пленка разрывается по внутренней и внешней поверхностям кольца, поэтому сила поверхностного натяжения

$$F_2 = \sigma l = \sigma\pi(d_1 + d_2). \tag{3}$$

Подставив формулы (2) и (3) в равенство (1), получим искомую силу

$$\boxed{F = \frac{\pi\rho g h}{4}\left(d_2^2 - d_1^2\right) + \pi\sigma\left(d_1 + d_2\right)}$$

Ответ: $F = 35{,}7$ мН.

4 Определите высоту h, на которую поднимается вода, полностью смачивающая капилляр радиусом $r = 0{,}4$ мм. Поверхностное натяжение воды $\sigma = 74$ мН/м, а ее плотность $\rho = 1$ г/см^3.

Дано: $r = 0{,}4$ мм $= 4 \cdot 10^{-4}$ м; $\sigma = 74$ мН/м $= 7{,}4 \cdot 10^{-2}$ Н/м; $\rho =$ $= 1$ г/см^3 $= 10^3$ кг/м^3.

Найти: h.

Решение. Подъем жидкости в капилляре будет происходить до тех пор, пока сила тяжести $F_т = mg$ не уравновесится силой поверхностного натяжения F, удерживающей воду на высоте h:

$$mg = F. \tag{1}$$

Масса жидкости равна произведению ее плотности на объем столба жидкости

$$m = \rho \pi r^2 h, \qquad (2)$$

где h — высота подъема жидкости в капилляре; r — радиус капилляра.

Сила поверхностного натяжения

$$F = \sigma l = \sigma \cdot 2\pi r, \qquad (3)$$

где $l = 2\pi r$ — длина контура, ограничивающая поверхность жидкости.

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1), найдем искомую высоту подъема столба жидкости в капилляре

$$\boxed{h = \frac{2\sigma}{\rho g r}}$$

$$[h] = \frac{\text{Н/м}}{\text{кг/(м}^3)\cdot\text{м/(с}^2)\cdot\text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{кг/с}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м/с}^2}{\text{кг/с}^2} = \text{м}.$$

Ответ: $h = 3{,}77$ см.

Задачи для самостоятельного решения

2.88. Абсолютная влажность воздуха $\rho = 9{,}4\cdot10^{-3}$ кг/м^3, а плотность насыщенных паров $\rho_н$ при рассматриваемой температуре составляет $15{,}4\cdot10^{-3}$ кг/м^3. Определите относительную влажность φ воздуха. ***Ответ***: $\varphi = 61$ %.

2.89. Относительная влажность φ воздуха при температуре $t = 16$ °С равна 65 %. Определите максимальную температуру $t_р$, при которой выпадает роса. ***Ответ***: $t_р = 9$ °С.

2.90. Определите относительную влажность φ воздуха при температуре $t = 20$ °С, если точка росы $t_р = 9$ °С. ***Ответ***: $\varphi =$ $= 48{,}9$ %.

2.91. Относительная влажность φ воздуха при $t = 20$ °С составляет 52 %. Выпадет ли роса, если ночью температура воздуха понизится до $t_1 = 10$ °С? ***Ответ***: нет.

2.92. В комнате объемом $V = 100$ м^3 при температуре 17 °С относительная влажность $\varphi = 54$ %. Определите давление $p_н$ насыщенного пара при этой температуре, если масса водяных паров в воздухе комнаты $n = 778$ г. Молярная масса водяных паров $M_п = 18\cdot10^{-3}$ кг/моль. ***Ответ***: $p_н = 1{,}93$ кПа.

2.93. В комнате объемом $V = 70$ м^3 давление $p_н$ насыщенных паров при температуре $t = 20$ °С составляет 2,33 кПа, относительная влажность $\varphi_1 = 15$ %. Определите массу m воды, которую следует испарить, чтобы при той же температуре относительная влажность достигла 45 %. Молярная масса воды $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. ***Ответ***: $m = 0{,}362$ кг.

2.94. Влажный термометр психрометра показывает температуру $t_1 = 8\,^\circ$С, а сухой — $t_2 = 12\,^\circ$С. Определите парциальное давление p водяного пара в помещении и абсолютную влажность ρ. ***Ответ***: $p = 798$ Па; $\rho = 6{,}1 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3.

2.95. Показания сухого и влажного термометров психрометра при температуре $t = 5\,^\circ$С одинаковы. Определите плотность насыщенных водяных паров $\rho_н$ в воздухе. ***Ответ***: $\rho_н = 6{,}8$ г/см^3.

2.96. Определите количество N капель воды в объеме $V = 5$ см^3, которая вытекает из трубки диаметром $d = 2$ мм, если диаметры шейки капли и трубки одинаковы. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, а ее поверхностное натяжение $\sigma = 74$ мН/м. ***Ответ***: $N = 21$.

2.97. Определите массу m капли спирта, вытекающего из пипетки, в момент отрыва, если диаметр отверстия пипетки $d = 1$ мм. Поверхностное натяжение σ спирта принять равным 0,02 Н/м. ***Ответ***: $m = 6{,}4 \cdot 10^{-6}$ кг.

2.98. Определите поверхностное натяжение σ воды, если диаметр отверстия пипетки, из которой вытекает вода, $d = 1{,}2$ мм, а масса $N = 49$ капель воды $m = 2$ г. ***Ответ***: $\sigma = 74$ мН/м.

2.99. Определите радиус r капиллярной трубки, если при полном смачивании вода в капилляре поднимается на высоту $h = 5$ см. Поверхностное натяжение воды $\sigma = 74$ мН/м, плотность $\rho = 1$ г/см^3. ***Ответ***: $r = 0{,}302$ мм.

2.100. В капилляре радиусом $r = 0{,}3$ мм жидкость поднялась на высоту $h = 18{,}9$ мм. Определите плотность ρ жидкости, если ее поверхностное натяжение $\sigma = 22$ мН/м. ***Ответ***: $\rho = 791$ кг/м^3.

2.101. Во сколько раз отличаются высоты поднятия бензина h_1 и спирта h_2 в капиллярах одинакового радиуса? Поверхностное натяжение бензина $\sigma_1 = 21$ мН/м, спирта — $\sigma_2 = 22$ мН/м, плотность бензина $\rho_1 = 0{,}7$ г/см^3, спирта — $\rho_2 = 0{,}79$ г/см^3. ***Ответ***: в 1,08 раза.

2.102. Определите массу m воды, поднявшейся в капилляре радиусом $r = 0{,}25$ мм, если поверхностное натяжение воды $\sigma =$ $= 74$ мН/м. ***Ответ***: $m = 1{,}18 \cdot 10^{-5}$ кг.

2.103. В капилляре, находящемся на поверхности Земли, жидкость поднялась на высоту $h = 12$ мм. Определите высоту поднятия h_1 столба этой же жидкости в том же капилляре на поверхности Луны, если ускорение свободного падения на поверхности Луны $g_1 = 0{,}165g$. ***Ответ***: $h_1 = 72{,}7$ мм.

2.104. Сила F внутреннего трения между параллельными слоями воздуха площадью $S = 0{,}5$ м^2, движущимися соответственно со скоростями $\upsilon_1 = 5$ м/с и $\upsilon_2 = 10$ м/с, равна 215 мкН. Определите коэффициент вязкости η, если слои отстоят друг друга на расстоянии $\Delta x = 20$ см. ***Ответ***: $\eta = 17{,}2$ мкПа·с.

2.105. Между двумя слоями азота площадью $S = 200$ см^2 действует сила внутреннего трения $F = 10$ мкН. Определите, как быстро изменяется скорость при переходе от одного слоя к другому в направлении, перпендикулярном направлению движения слоев, если коэффициент вязкости η азота равен 16,6 мкПа. ***Ответ***: $\frac{\Delta \upsilon}{\Delta x} = 30{,}1\ \frac{\text{м/с}}{\text{м}}$.

Глава 9

Твердые тела и их превращения

Основные законы и формулы

■ Напряжение при упругой деформации

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

[F — растягивающая (сжимающая) сила; S — площадь поперечного сечения].

■ Относительное продольное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

[Δl — изменение длины тела при растяжении (сжатии); l — длина тела до деформации].

■ Относительное поперечное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}$$

[Δd — изменение диаметра стержня при растяжении (сжатии); d — диаметр стержня].

■ Закон Гука для продольного растяжения (сжатия)

$$\sigma = E\varepsilon$$

[E — модуль Юнга].

■ Относительное изменение длины тела

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha \Delta T$$

[l_0 — длина тела при начальной температуре; α — коэффициент линейного (теплового) расширения; ΔT — изменение термодинамической температуры].

■ Зависимость длины тела от температуры

$$l = l_0(1 + \alpha t)$$

[l — длина тела при температуре t; l_0 — его длина при температуре 0 °C; α — коэффициент линейного теплового расширения].

■ Относительное изменение объема тела

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \beta \Delta T$$

[V_0 — объем тела при начальной температуре; β — коэффициент объемного теплового расширения; ΔT — изменение термодинамической температуры].

■ Зависимость объема тела от температуры

$$V = V_0(1 + \beta t)$$

[V — объем тела при температуре t; V_0 — его объем при температуре 0 °С; β — коэффициент объемного теплового расширения].

Примеры решения задач

1 К медному стержню длиной $l = 50$ см и диаметром $d = 2$ см подвешен груз массой $m = 1$ т. Определите относительное продольное растяжение ε стержня и энергию упругой деформации стержня. Модуль Юнга для меди $E = 118$ ГПа.

Дано: $l = 50$ см $= 0{,}5$ м; $d = 2$ см $= 2 \cdot 10^{-2}$ м; $m = 1$ т $= 10^3$ кг; $E = 118$ ГПа $= 118 \cdot 10^9$ Па.

Найти: ε; $E_{\text{упр}}$.

Решение. Относительное продольное растяжение $\varepsilon = \Delta l / l$, где Δl — изменение длины стержня при растяжении.

Согласно закону Гука, напряжение при упругой деформации

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{1}$$

где $\sigma = F_{\text{упр}}/S$, причем упругая сила по модулю равна силе тяжести mg (mg — предельная сила, при которой еще действует закон Гука), а площадь поперечного сечения стержня $S = \pi d^2/4$.

Подставив эти выражения в формулу (1), найдем искомое относительное продольное растяжение

$$\boxed{\varepsilon = \frac{4mg}{\pi d^2 E}}$$

Энергия упругой деформации стержня равна работе деформирующей силы $\langle F \rangle$ по удлинению стержня на Δl, т. е.

$$E_{\text{упр}} = A = \langle F \rangle \Delta l; \tag{2}$$

$$\langle F \rangle = \frac{0 + F}{2} = \frac{F}{2} = \frac{mg}{2}. \tag{3}$$

Абсолютное удлинение

$$\Delta l = \varepsilon l. \qquad (4)$$

Подставив выражения (3) и (4) в формулу (2), найдем искомую энергию упругой деформации стержня

$$\boxed{E_{\text{упр}} = \frac{mg}{2}\varepsilon l}$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м/с}^2}{\text{м}^2\cdot\text{Па}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2\cdot\text{Н/м}^2} = 1,$$

$$[E_{\text{упр}}] = \text{кг}\cdot\text{м/(с}^2)\cdot\text{м} = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж}.$$

Ответ: $\varepsilon = 2{,}65\cdot10^{-4}$; $E_{\text{упр}} = 0{,}65$ Дж.

2 Определите длины железного и медного стержней при 0 °С при условии, что железный стержень при любой температуре длиннее алюминиевого на 4 см. Коэффициенты линейного теплового расширения железа и меди соответственно равны $\alpha_1 = 1{,}2\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$ и $\alpha_2 = 1{,}6\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$.

Дано: $t_0 = 0$ °С; $L = 4$ см $= 4\cdot10^{-2}$ м; $\alpha_1 = 1{,}2\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$; $\alpha_2 = 1{,}6\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$.

Найти: l_{01}; l_{02}.

Решение. Согласно условию задачи

$$L = l_1 - l_2 \quad \text{и} \quad L = l_{01} - l_{02}, \qquad (1)$$

где l_1, l_2, l_{01}, l_{02} — соответственно длина железного и алюминиевого стержней при температурах t и 0 °С. Для железного стержня

$$l_1 = l_{01}(1 + \alpha_1\Delta t); \qquad (2)$$

для медного стержня

$$l_2 = l_{02}(1 + \alpha_2\Delta t), \qquad (3)$$

где $\Delta t = t - t_0$.

Вычитая (3) из (2) с учетом условий (1), получим

$$\alpha_1 l_{01} = \alpha_2 l_{02}.$$

Так как $l_{01} - l_{02} = L$, то искомые длины стержней при 0 °С

$$\boxed{l_{02} = \frac{\alpha_1 L}{\alpha_2 - \alpha_1}} \qquad \boxed{l_{01} = l_{02} + L}$$

Ответ: $l_{02} = 12$ см; $l_{01} = 16$ см.

Задачи для самостоятельного решения

2.106. Под действием растягивающей силы диаметр стержня изменился от 2,2 до 2 см. Определите абсолютное Δd и относительное поперечное ε' растяжения стержня. ***Ответ***: $\Delta d = 0{,}2$ см; $\varepsilon' = 0{,}1$.

2.107. Верхний конец медного стержня длиной $l = 1{,}5$ м с площадью поперечного сечения $S = 5$ см^2 закреплен неподвижно, а к нижнему его концу подвешен груз массой $m = 1\,500$ кг. Модуль Юнга для меди $E = 118$ ГПа. Определите нормальное напряжение σ стержня; абсолютное Δl и относительное ε удлинения стрежня. ***Ответ***: $\sigma = 29{,}4$ МПа; $\Delta l = 374$ мкм; $\varepsilon = 2{,}49 \cdot 10^{-4}$.

2.108. Определите радиус r стального троса подъемного крана, если максимальная масса поднимаемого груза $m = 10$ т, а запас прочности должен быть равен 8. Предел пропорциональности стальной проволоки $\sigma_п = 850$ МПа. ***Ответ***: $r = 1{,}71$ см.

2.109. Какой должна быть длина l подвешенной за один конец серебряной проволоки, при которой наступит ее разрыв под действием собственного веса? Предел прочности серебра на разрыв $\sigma_{пр} = 2{,}9 \cdot 10^8$ Па, плотность ρ серебра $10{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3. ***Ответ***: $l = 2{,}82$ км.

2.110. Пружина под действием упругой силы $F_1 = 200$ Н удлинилась на $\Delta l_1 = 3$ см. Определите потенциальную энергию пружины при ее растяжении на $\Delta l_2 = 12$ см. ***Ответ***: $E_{п2} = 48$ Дж.

2.111. Определите силу F, которую следует приложить к медному стержню площадью поперечного сечения $S = 6$ см^2, чтобы не дать ему удлиниться при нагревании от 0 до 40 °С. Модуль Юнга для меди $E = 118$ ГПа, коэффициент линейного теплового расширения для меди $\alpha = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$. ***Ответ***: $F = 48{,}1$ кН.

2.112. Алюминиевая проволока диаметром $d = 2$ мм под действием растягивающей силы удлинилась на столько, на сколько она удлиняется при нагревании на $\Delta T = 40$ К. Принимая для алюминия модуль Юнга $E = 69$ ГПа и коэффициент линейного теплового расширения $\alpha = 2{,}3 \cdot 10^5$ К$^{-1}$, определите числовое значение растягивающей силы F. ***Ответ***: $F = 199$ Н.

2.113. Медная проволока сечением $S = 10$ мм^2 под действием растягивающей силы $F = 400$ Н удлинилась на столько, на сколько она удлиняется при нагревании на 20 К. Определите модуль Юнга E для меди, если для нее коэффициент линейного теплового расширения $\alpha = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$. ***Ответ***: $E = 118$ ГПа.

2.114. На проволоке длиной $l_1 = 0{,}7$ м подвешен груз массой $m_1 = 20$ кг. При подвешивании к этой проволоке груза массой

$m_2 = 50$ кг ее длина оказалась $l_2 = 1$ м. Определите длину проволоки l_0 без груза. ***Ответ***: $l_0 = 0{,}5$ м.

2.115. Определите, на сколько увеличится объем ΔV сплошного медного куба при сообщении ему количества теплоты $\Delta Q = 400$ кДж. Удельная теплоемкость меди $c = 395$ Дж/(кг·К), ее плотность $\rho = 8{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, коэффициент объемного теплового расширения $\beta = 4{,}8 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$. ***Ответ***: $\Delta V = 5{,}65$ см^3.

Раздел III

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Глава 10

Электростатика

Основные законы и формулы

■ Закон сохранения электрического заряда в замкнутой системе

$$\sum_i Q_i = \text{const}.$$

■ Закон Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2} \text{ (в вакууме)},$$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{\varepsilon r^2} \text{ (в среде)}$$

[F — сила взаимодействия двух точечных зарядов Q_1 и Q_2; r — расстояние между зарядами; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная; ε — диэлектрическая проницаемость среды].

■ Напряженность электростатического поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0}$$

[$\vec{F}$ — сила, действующая на точечный положительный заряд Q_0, помещенный в данную точку поля].

■ Напряженность электростатического поля точечного заряда Q на расстоянии r от заряда

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

■ Принцип суперпозиции электростатических полей

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n$$

[$\vec{E}_1, \vec{E}_2, \ldots, \vec{E}_n$ — напряженность поля, создаваемого зарядами Q_1, Q_2, ..., Q_n].

■ Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью,

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

■ Напряженность поля, создаваемого двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями,

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

■ Плотность зарядов линейная, поверхностная и объемная, т. е. заряд, приходящийся соответственно на единицу длины, поверхности и объема:

$$\tau = \frac{Q}{l}; \quad \sigma = \frac{Q}{S}; \quad \rho = \frac{Q}{V}.$$

■ Потенциальная энергия заряда Q_0 в поле заряда Q на расстоянии r от него

$$W_п = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_0}{r}.$$

■ Потенциал электростатического поля

$$\varphi = \frac{W_п}{Q_0}, \quad \varphi = \frac{A_\infty}{Q_0}$$

[$W_п$ — потенциальная энергия пробного положительного заряда Q_0; A_∞ — работа по перемещению единичного положительного заряда при удалении его из данной точки в бесконечность].

■ Потенциал электростатического поля точечного заряда на расстоянии r от заряда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}.$$

■ Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда Q_0 из точки 1 в точку 2,

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{QQ_0}{r_1} - \frac{QQ_0}{r_2}\right);$$

$$A_{12} = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2).$$

■ Разность потенциалов между двумя точками 1 и 2 электростатического поля

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{Q_0}.$$

■ Принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n$$

[φ_1, φ_2, ..., φ_n — потенциал поля, создаваемого зарядами Q_1, Q_2, ..., Q_n].

■ Электроемкость уединенного проводника

$$C = \frac{Q}{\varphi}$$

[Q — заряд, сообщенный проводнику; φ — потенциал проводника].

■ Электроемкость шара радиусом R

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

■ Электроемкость конденсатора

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

[Q — заряд, накопленный на обкладках конденсатора; $(\varphi_1 - \varphi_2)$ — разность потенциалов между обкладками].

■ Электроемкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$$

[S — площадь каждой пластины конденсатора; d — расстояние между пластинами].

■ Электроемкость системы конденсаторов соответственно при последовательном и параллельном соединениях

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n};$$

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$$

[C_1, C_2, ..., C_n — электроемкость первого, второго, ..., n-го конденсаторов].

■ Энергия уединенного заряженного проводника

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}.$$

■ Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{Q\Delta\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

[Q — заряд конденсатора; C — его электроемкость; $\Delta\varphi$ — разность потенциалов между обкладками].

■ Энергия электростатического поля плоского конденсатора

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V$$

[S — площадь одной пластины; U — разность потенциалов между пластинами; $V = Sd$ — объем конденсатора].

■ Объемная плотность энергии электростатического поля

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}.$$

Примеры решения задач

1 Два одинаковых шарика одинаковой массы и заряда, подвешенные на нитях равной длины, опускают в трансформаторное масло, плотность которого $\rho = 0{,}94$ г/см^3 и диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 2{,}2$. Определите плотность ρ_1 материала шариков, если углы расхождения нитей в воздухе и масле оказались одинаковыми.

Дано: $\rho = 0{,}94$ г/см^3 $= 0{,}94 \cdot 10^3$ кг/м^3; $\varepsilon = 2{,}2$; $l_1 = l_2 = l$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.

Найти: ρ_1.

Решение. До погружения в жидкий диэлектрик, т. е. в воздухе, на каждый шарик (рис. 68, *а*) действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, кулоновская сила $\vec{F}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. При равновесии шариков

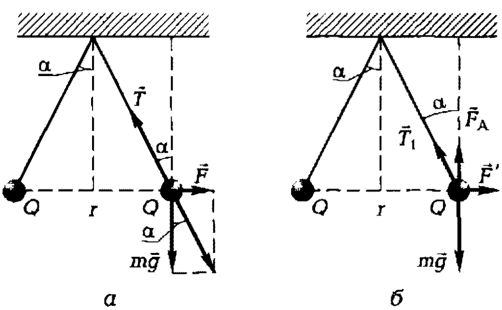


Рис. 68

$$m\vec{g}+\vec{F}+\vec{T}=0.$$

После погружения в жидкий диэлектрик (в трансформаторное масло) на каждый шарик (рис. 68, *б*) действует сила тяжести $m\vec{g}$, кулоновская сила $\vec{F}'$, выталкивающая архимедова сила $\vec{F}_A$ и сила натяжения нити $\vec{T}_1$. При равновесии шариков

$$m\vec{g}+\vec{F}'+\vec{F}_A+\vec{T}_1=0.$$

Кулоновская сила отталкивания шариков в воздухе (из треугольника на рис. 68, *а*)

$$F = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha; \tag{1}$$

кулоновская сила в диэлектрике

$$F' = (mg - F_A)\,\mathrm{tg}\,\alpha \tag{2}$$

(учли выталкивающую силу). В диэлектрике кулоновская сила уменьшается в ε_1 раз, так что

$$F' = \frac{F}{\varepsilon}. \tag{3}$$

Тогда

$$\frac{F}{\varepsilon} = (mg - F_A)\,\mathrm{tg}\alpha. \tag{4}$$

Поделив выражение (4) на выражение (1), получим

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{mg - F_A}{mg} = 1 - \frac{F_A}{mg}. \tag{5}$$

Согласно закону Архимеда,

$$F_A = \rho V g,$$

где ρ — плотность жидкого диэлектрика; V — объем шарика; g — ускорение свободного падения. Масса шарика $m = \rho_1 V$, где ρ_1 — плотность материала шарика. Подставив последние два выражения в формулу (5), получим

$$\frac{1}{\varepsilon} = 1 - \frac{\rho}{\rho_1},$$

откуда искомая плотность материала шарика

$$\boxed{\rho_1 = \frac{\varepsilon\rho}{\varepsilon - 1}}$$

Ответ: $\rho_1 = 1,72$ г/см^3.

2 Электростатическое поле создается двумя бесконечными параллельными плоскостями, заряженными равномерно одноименными зарядами с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 4$ мкКл/м^2 и $\sigma_2 = 1$ мкКл/м^2. Определите напряженность электростатического поля между плоскостями и за пределами плоскостей.

Дано: $\sigma_1 = 4$ мкКл/м^2 $= 4 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2; $\sigma_2 = 1$ мкКл/м^2 $= 10^{-6}$ Кл/м^2.

Найти: $E_{\text{внутр}}$; $E_{\text{ввешн}}$.

Решение. Согласно принципу суперпозиции,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \qquad (1)$$

причем каждая из заряженных плоскостей создает электростатическое поле независимо от наличия другой заряженной плоскости (рис. 69).

Напряженность электростатического поля, создаваемого каждой из бесконечных плоскостей в вакууме:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \text{ и } E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}. \qquad (2)$$

Между плоскостями векторы напряженностей направлены в противоположные стороны, следовательно, суммарная напряженность поля равна разности напряженностей полей, создаваемых первой и второй плоскостями:

$$E_{\text{внутр}} = E_1 - E_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0},$$

$$\boxed{E_{\text{внутр}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}}$$

В пространстве за пределами плоскостей векторы напряженностей сонаправлены, следовательно, суммарная напряженность поля равна сумме напряженностей полей, создаваемых первой и второй плоскостями:

$$E_{\text{внеш}} = E_1 + E_2$$

или

$$\boxed{E_{\text{внеш}} = \mp\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}}$$

(векторы $\vec{E}$ за пределами плоскостей направлены в разные стороны).

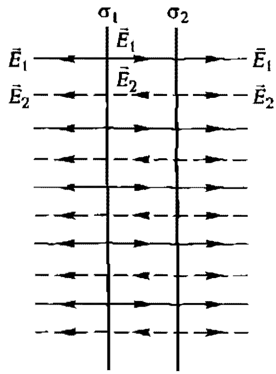


Рис. 69

$$[E]=\frac{\text{Кл/м}^2}{\text{Кл}^2/(\text{Н}\cdot\text{м}^2)}=\frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

Ответ: $E_{\text{внутр}}$ = 169 кН/Кл; $E_{\text{внеш}} = \mp 282$ кН/Кл.

3 Две параллельные пластины площадью S = 100 см^2 каждая, находящиеся в воздухе, заряжены разноименными зарядами Q = = 70 нКл. Определите работу A, которую следует совершить, чтобы раздвинуть пластины на расстояние Δx = 0,1 мм.

Дано: S = 100 см^2 = 10^{-2} м^2; Q = 70 нКл = $7\cdot10^{-8}$ Кл; Δx = = 0,1 мм = 10^{-4} м.

Найти: A.

Решение. Для раздвижения пластин на расстояние Δx следует совершить работу

$$A = F\Delta x, \tag{1}$$

где сила

$$F = QE, \tag{2}$$

[Q — заряд одной пластины; E — напряженность электростатического поля, создаваемого одной из пластин]. Имеем

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}, \tag{3}$$

где $\sigma=\dfrac{Q}{S}$ — поверхностная плотность заряда.

Подставив формулы (2) и (3) в выражение (1), найдем искомую работу

$$\boxed{A=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\Delta x}$$

$$[A]=\frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}}{\text{Кл}^2/(\text{Н}\cdot\text{м}^2)\cdot\text{м}^2}=\text{Н}\cdot\text{м}=\text{Дж}.$$

Ответ: A = 2,77 мкДж.

4 Три точечных заряда Q_1 = 2 нКл, Q_2 = 3 нКл и Q_3 = –4 нКл расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной a = 10 см (рис. 70). Определите потенциальную энергию этой системы.

Дано: Q_1 = 2 нКл = $2\cdot10^{-9}$ Кл; Q_2 = 3 нКл = $3\cdot10^{-9}$ Кл; Q_3 = = –4 нКл = $-4\cdot10^{-9}$ Кл; a = 10 см = 0,1 м.

Найти: $W_{\text{п}}$.

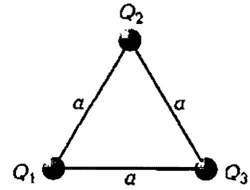


Рис. 70

Решение. Потенциальная энергия системы зарядов равна алгебраической сумме энергий взаимодействия каждой из взаимодействующих пар зарядов, т. е.

$$W_п = W_{п12} + W_{п13} + W_{п23}, \qquad (1)$$

где потенциальные энергии одного из зарядов, находящегося в поле другого заряда на расстоянии a от него, соответственно равны

$$W_{п12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{a}; \; W_{п13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_3}{a}; \; W_{п23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2Q_3}{a}. \qquad (2)$$

Подставив формулы (2) в выражение (1), найдем искомую потенциальную энергию системы зарядов

$$\boxed{W_п = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(Q_1Q_2 + Q_1Q_3 + Q_2Q_3\right)}$$

$$[W_п] = \frac{\text{Кл}^2}{\text{Кл}^2/(\text{Н}\cdot\text{м}^2)\cdot\text{м}} = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж}.$$

Ответ: $W_п = -1{,}26$ мкДж.

5 Батарея из трех последовательно соединенных конденсаторов электроемкостью $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ и $C_3 = 4$ мкФ подсоединена к источнику ЭДС. Заряд батареи конденсаторов $Q = 40$ мкКл. Определите напряжения U_1, U_2 и U_3 на каждом конденсаторе, ЭДС источника $\mathscr{E}$ и электроемкость C батареи конденсаторов.

Дано: $C_1 = 1$ мкФ $= 10^{-6}$ Ф; $C_2 = 2$ мкФ $= 2\cdot10^{-6}$ Ф; $C_3 = 4$ мкФ $=$ $= 4\cdot10^{-6}$ Ф; $Q = 40$ мкКл $= 4\cdot10^{-5}$ Кл.

Найти: U_1; U_2; U_3; $\mathscr{E}$; C.

Решение. При последовательном соединении конденсаторов заряды всех обкладок равны по модулю, поэтому

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q.$$

Напряжения на конденсаторах

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}; \; U_2 = \frac{Q}{C_2}; \; U_3 = \frac{Q}{C_3}.$$

ЭДС источника равна сумме напряжений каждого из последовательно соединенных конденсаторов

$$\mathscr{E} = U_1 + U_2 + U_3.$$

При последовательном соединении суммируются величины, обратные электроемкостям каждого из конденсаторов:

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}.$$

Таким образом, искомая электроемкость батареи конденсаторов

$$\boxed{C=\frac{C_1C_2C_3}{C_1C_2+C_1C_3+C_2C_3}}$$

Ответ: U_1 = 40 В; U_2 = 20 В; U_3 = 10 В; $\mathscr{E}$ = 70 В; C = = 0,571 мкФ.

6 К пластинам плоского воздушного конденсатора приложена разность потенциалов U_1 = 500 В. Площадь пластин конденсатора S = 200 см^2, расстояние между ними d_1 = 1,5 мм. Пластины раздвинули до расстояния d_2 = 15 мм. Определите энергию W_1 и W_2 конденсатора до и после раздвижения пластин, если источник напряжения до раздвижения: 1) отключался; 2) не отключался.

Дано: U_1 = 500 В; S = 200 см^2 = $2 \cdot 10^{-2}$ м^2; d_1 = 1,5 мм = = $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м; d_2 = 15 мм = $1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м.

Найти: 1) W_1; W_2; 2) W_1; W_2.

Решение. 1) Заряд пластин конденсатора, *отключенного от источника напряжения*, при их раздвижении не меняется, т. е.

$$Q_1=Q_2=Q=\text{const} \tag{1}$$

Электроемкость конденсатора и напряжение на нем соответственно с учетом (1):

- до раздвижения пластин

$$C_1=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d_1};\quad U_1=\frac{Q}{C_1}=\frac{Qd_1}{\varepsilon_0\varepsilon S}; \tag{2}$$

- после раздвижения пластин

$$C_2=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d_2};\quad U_2=\frac{Q}{C_2}=\frac{Qd_2}{\varepsilon_0\varepsilon S}. \tag{3}$$

Энергия заряженного конденсатора

$$W=\frac{CU^2}{2}, \tag{4}$$

откуда, учитывая формулу для C_1, получаем

$$\boxed{W_1 = \frac{C_1U_1^2}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon SU_1^2}{2d_1}}$$

Разделив почтенно (2) на (3), найдем

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{d_2}{d_1},$$

откуда

$$U_2 = \frac{d_2}{d_1}U_1. \tag{5}$$

Тогда

$$\boxed{W_2 = \frac{C_2U_2^2}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon Sd_2^2U_1^2}{2d_2d_1^2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon Sd_2U_1^2}{2d_1^2}}$$

$$[W] = \frac{\text{Кл}^2/(\text{Н}\cdot\text{м}^2)\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}\cdot\text{В}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}\cdot\text{В}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}^2\cdot\text{м}}{\text{Дж}\cdot\text{м}} = \text{Дж}.$$

2) Разность потенциалов на пластинах конденсатора, *не отключенного от источника напряжения*, остается постоянной, т. е.

$$U_1 = U_2 = U = \text{const}. \tag{6}$$

Подставив в формулу (4) выражения для C_1 и C_2 из (2) и (3) и учитывая (6), найдем искомые энергии

$$\boxed{W_1 = \frac{C_1U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon SU^2}{2d_1}}$$

$$\boxed{W_2 = \frac{C_2U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon SU^2}{2d_2}}$$

Ответ: 1) W_1 = 14,8 мкДж; W_2 = 148 мкДж; 2) W_1 = = 14,8 мкДж; W_2 = 1,48 мкДж.

7 Плоский воздушный конденсатор электроемкостью C_1 = = 4 пФ заряжен до разности потенциалов U_1 = 500 В. После отключения конденсатора от источника напряжения расстояние между обкладками конденсатора увеличили в три раза. Определите разность потенциалов U_2 на обкладках конденсатора после их раздвижения и работу A внешних сил по раздвижению пластин.

Дано: C_1 = 4 пФ = $4\cdot10^{-12}$ Ф; U_1 = 500 В; $d_2 = 3d_1$.

Найти: U_2; A.

Решение. Заряд обкладок конденсатора после отключения от источника напряжения не меняется, т. е. Q = const, поэтому

$$C_1U_1 = C_2U_2, \tag{1}$$

где C_2 и U_2 — соответственно электроемкость и разность потенциалов на обкладках конденсатора после их раздвижения.

Учитывая, что электроемкость плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$, из формулы (1) получим искомую разность потенциалов

$$\boxed{U_2 = \frac{C_1}{C_2}U_1 = \frac{d_2}{d_1}U_1} \tag{2}$$

После отключения конденсатора от источника напряжения систему двух заряженных обкладок можно рассматривать как замкнутую, для которой выполняется закон сохранения энергии: работа A внешних сил равна изменению энергии системы

$$A = W_2 - W_1, \tag{3}$$

где W_1 и W_2 — соответственно энергия поля конденсатора в начальном и конечном состояниях.

Учитывая, что $W_1 = \frac{Q^2}{2C_1}$ и $W_2 = \frac{Q^2}{2C_2}$ ($Q = \text{const}$), из формулы (3) получим искомую работу внешних сил

$$A = W_2 - W_1 = \frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{C_1^2U_1^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_2}\right) = \frac{C_1U_1^2}{2}\left(\frac{U_2}{U_1} - 1\right)$$

[учли, что $Q = C_1U_1$ и формулу (2)].

$$\boxed{A = \frac{C_1U_1^2}{2}\left(\frac{U_2}{U_1} - 1\right)}$$

$$[A] = \text{Ф} \cdot \text{В}^2 = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} \cdot \text{В}^2 = \text{Кл} \cdot \text{В} = \text{Дж}.$$

Ответ: $U_2 = 1{,}5$ кВ; $A = 1$ мкДж.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Два маленьких шарика с зарядами $Q_1 = 1$ мКл и $Q_2 = 9$ мКл соответственно находятся в вакууме на расстоянии $r = 30$ см. Шарики привели в соприкосновение. Определите, на какое расстояние r_1 следует их развести, чтобы сила взаимодействия между шариками оказалась такой же. ***Ответ***: $r_1 = 0{,}5$ м.

3.2. Два одинаковых шарика массой $m = 100$ г каждый, соприкасаясь между собой, подвешены в вакууме на нитях длиной $l = 80$ см. Определите расстояние r, на которое разойдутся шарики, если им сообщить заряд $Q = 5$ нКл. Угол отклонения нити принять малым. ***Ответ***: $r = 4{,}51$ мм.

3.3. Два точечных заряда $Q_1 = 1$ мкКл и $Q_2 = 3$ мкКл, находящихся в вакууме, взаимодействуют друг с другом с силой $F = 0{,}1$ Н. Определите расстояние r между зарядами. ***Ответ***: $r = 52$ см.

3.4. Два маленьких шарика с одинаковым по модулю зарядом находятся на расстоянии $r = 50$ см друг от друга и взаимодействуют в вакууме с силой $F = 50$ мкН. Определите число N нескомпенсированных зарядов на каждом из шариков. ***Ответ***: $N = 2{,}33 \cdot 10^{13}$.

3.5. Два точечных заряда отталкиваются друг от друга в масле (диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_1 = 5$) с силой $F_1 = 100$ мН. Определите силу F_2 отталкивания этих зарядов в керосине ($\varepsilon_2 = 2$), если они находятся на расстоянии, в три раза меньшем, чем в масле. ***Ответ***: $F_2 = 2{,}25$ Н.

3.6. Два одинаковых шарика массой $m = 100$ г каждый находятся в вакууме на некотором расстоянии друг от друга. Определите, какие одинаковые заряды Q следует сообщить шарикам, чтобы их взаимодействие уравновешивало силы тяготения. ***Ответ***: $Q = 8{,}61$ пКл.

3.7. К шарику зарядом $Q_1 = 10$ нКл и массой $m = 0{,}5$ г, висящему на тонкой шелковой нити, на расстоянии $r = 2{,}5$ см от него поднесли второй заряженный шарик. Определите заряд Q_2 второго шарика, если натяжение нити уменьшилось в два раза. ***Ответ***: $Q_2 = 17$ нКл.

3.8. Расстояние l между двумя одноименными заряженными точечными зарядами ($Q_1 = 2$ нКл и $Q_2 = 5$ нКл), расположенными в вакууме, равно 20 см. Определите силу F, действующую на заряд $Q_0 = 1$ нКл, который помещен в точку, находящуюся на прямой, соединяющей заряды Q и отстоящую от них на одинаковом расстоянии. ***Ответ***: $F = 2{,}7$ мкН.

3.9.* Два точечных заряда ($Q_1 = 5$ нКл и $Q_2 = -8$ нКл) расположены друг от друга в вакууме на расстоянии $l = 10$ см. Определите силу F, которая действует на заряд $Q_0 = 1$ нКл, помещенный в точку, находящуюся на прямой, соединяющей заряды и удаленную на $r_1 = 4$ см от первого заряда и на $r_2 = 6$ см от второго заряда. ***Ответ***: $F = 48{,}1$ мкН.

3.10. Три точечных отрицательных заряда $Q = -4$ нКл каждый находятся в вершинах равностороннего треугольника. Определите, какой заряд Q_1 нужно поместить в центр треугольника, чтобы система находилась в равновесии. ***Ответ***: $Q_1 = 2{,}31$ нКл.

3.11. Определите напряженность E_A поля, создаваемого диполем с электрическим моментом $p = 1$ нКл·м на расстоянии $r = 25$ см от центра диполя в перпендикулярном направлении. ***Ответ***: $E_A = 576$ В/м.

3.12. В боровской модели атома водорода электрон движется по круговой орбите радиусом $r = 52{,}8$ пм, в центре которой находится протон. Определите скорость v электрона на орбите. ***Ответ***: $v = 2{,}19$ Мм/с.

3.13. Электростатическое поле создается в вакууме точечным зарядом $Q = 1$ нКл. Определите напряженность E поля в точке, которая находится на расстоянии $r = 3$ см от заряда, и силу F, действующую в этой точке на заряд $Q_0 = 3$ нКл. ***Ответ***: $E = 10^4$ В/м; $F = 30$ мкН.

3.14. Электростатическое поле создается в вакууме зарядом Q. В точке, расположенной на расстоянии $r = 30$ см от него, на заряд $Q_0 = 5$ нКл действует сила $F = 1$ мкН. Определите напряженность E поля в точке, где находится заряд Q_0, и заряд Q_1. ***Ответ***: $E = 200$ В/м; $Q = 2$ нКл.

3.15. Электростатическое поле создается в вакууме точечным зарядом. Определите напряженность этого поля E_1 в точке, расположенной на расстоянии $r_1 = 5$ см от заряда, если на расстоянии $r_2 = 15$ см от него $E_2 = 100$ кВ/м. ***Ответ***: $E_1 = 900$ кВ/м.

3.16. Определите расстояние r_2 от точечного заряда, на котором напряженность электростатического поля в воде будет такой же, как в вакууме на расстоянии $r_1 = 13{,}5$ см от заряда. Диэлектрическая проницаемость воды $\varepsilon_2 = 81$; вакуума $\varepsilon_1 = 1$. ***Ответ***: $r_2 = 1{,}5$ см.

3.17. В пространстве между горизонтальными пластинами плоского воздушного конденсатора взвешена капелька ртути. Определите радиус r этой капельки, если ее заряд $Q = 1$ нКл, а напряженность электростатического поля конденсатора $E = 10^5$ В/м. Плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^2. ***Ответ***: $r = 0{,}564$ мм.

3.18. Медный шарик (плотность меди $\rho = 8{,}93$ г/см^3) радиусом $r = 0{,}5$ см помещен в масло ($\rho_1 = 0{,}8$ г/см^3). Определите заряд Q шарика, если в однородном электростатическом поле он оказался взвешенным в масле. Электростатическое поле направлено вертикально вверх, и его напряженность $E = 4{,}25$ кВ/см. ***Ответ***: $Q = 10$ нКл.

3.19. Определите ускорение a, с которым движется протон в электростатическом поле напряженностью $E = 1$ кВ/м. Масса протона $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг, заряд $e_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. ***Ответ***: $a = 9{,}58 \cdot 10^{10}$ м/с^2.

3.20.* Два точечных заряда $Q_1 = 4$ нКл и $Q_2 = -2$ нКл находятся друг от друга на расстоянии $l = 50$ см в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2{,}2$. Определите напряженность поля E_A в точке A, находящейся посередине отрезка прямой, соединяющей заряды. ***Ответ***: $E_A = 393$ В/м.

3.21. * Два одноименных точечных заряда $Q = 5$ нКл расположены в вакууме на расстоянии $l = 8$ см друг от друга. Определите напряженность E_A в точке A, расположенной на расстоянии $r = 3$ см на перпендикуляре, восстановленном из середины отрезка, который соединяет заряды. ***Ответ***: $E_A = 21{,}6$ кВ/м.

3.22.* Два разноименных точечных заряда $Q = \pm 5$ нКл расположены в вакууме на расстоянии $l = 8$ см друг друга. Определите напряженность в точке A, расположенной на расстоянии $r = 3$ см на перпендикуляре, восстановленном из середины отрезка, который соединяет заряды. ***Ответ***: $E_A = 28{,}8$ кВ/м.

3.23. Расстояние d между точечными зарядами $Q_1 = 3$ нКл и $Q_2 = 5$ нКл, находящимися в вакууме ($\varepsilon = 1$), равно 35 см. Определите напряженность E_A электростатического поля в точке A, отстоящей на расстоянии $r_1 = 25$ см от первого заряда и на расстоянии $r_2 = 20$ см от второго заряда. ***Ответ***: $E_A = 1{,}28$ кВ/м.

3.24. Сфера радиусом $R = 3$ см заряжена равномерно с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ нКл/см^2. Определите напряженность E электростатического поля в вакууме на расстоянии $r = 10$ см от центра сферы. ***Ответ***: $E = 1{,}02 \cdot 10^5$ В/м.

3.25. Напряженность поля, создаваемого в вакууме двумя сферами, заряженными равномерно с одинаковой поверхностью, на расстояниях $r_1 = 5$ см и $r_2 = 10$ см от центра сфер оказалась одинаковой. Определите радиус R_2 второй сферы, если радиус первой сферы $R_1 = 3$ см. 1) ***Ответ***: $R_2 = 6$ см.

3.26.* Электростатическое поле создается двумя бесконечными параллельными плоскостями, заряженными равномерно разноименными зарядами с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 3$ нКл/м^2 и $\sigma_2 = -6$ нКл/м^2. Определите напряженность электростатического поля: 1) между плоскостями; 2) за пределами плоскостей. ***Ответ***: 1) $E = 508$ В/м; 2) $E = \mp 169$ В/м.

3.27. Пространство между двумя бесконечными параллельными плоскостями, заряженными равномерно одноименными зарядами с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 3$ нКл/м^2 и $\sigma_2 = 2$ нКл/м^2, заполнено эбонитом ($\varepsilon = 3$). Определите напряженность электростатического поля: 1) между плоскостями; 1) за пределами плоскостей. ***Ответ***: 1) $E_1 = 18{,}8$ В/м; 2) $E_2 = \pm 282$ В/м.

3.28. Определите напряженность E_A поля, создаваемого диполем с электрическим моментом $p = 0{,}5$ нКл·м на расстоянии $r = 40$ см от центра диполя в направлении, перпендикулярном плечу диполя. ***Ответ***: $E_A = 70{,}3$ В/м.

3.29. Под действием электростатического поля равномерно заряженной бесконечной плоскости точечный заряд $Q = 2$ нКл переместился вдоль линии напряженности на расстояние, равное $l = 2$ см; при этом совершена работа $A = 40$ мкДж. Определите поверхностную плотность σ заряда на плоскости. ***Ответ***: $\sigma = 1{,}77$ мкКл/м^2.

3.30.* Две параллельные пластины площадью $S = 50$ см^2 каждая, находящиеся в воздухе, заряжены разноименными зарядами $Q = \pm 40$ нКл. Определите работу A, которую следует совершить, чтобы раздвинуть пластины на расстояние $l = 10$ см. ***Ответ***: $A = 1{,}81$ мДж.

3.31. В однородном электростатическом поле напряженностью $E = 500$ В/м переместили заряд $Q = -10$ нКл в направлении линий напряженности на расстояние $l = 5$ см. Определите работу A сил поля и изменение потенциальной энергии $\Delta W_п$ заряда. ***Ответ***: $A = -0{,}25$ мкДж; $\Delta W_п = 0{,}25$ мкДж.

3.32. Точечный заряд $Q = 10$ нКл перемещается в однородном электростатическом поле напряженностью $E = 1$ кВ/м на расстояние $l = 40$ см под углом $\alpha = 60°$ к линиям напряженности поля. Определите работу A сил электростатического поля и изменение потенциальной энергии $\Delta W_п$ заряда. ***Ответ***: $A = 2$ мкДж; $\Delta W_п = -2$ мкДж.

3.33. Потенциал φ_1 заряженного шара радиусом $R = 30$ см равен 60 В. Определите потенциал φ_2 электростатического поля, создаваемого этим шаром в вакууме в точке на расстоянии l радиуса шара от его поверхности. ***Ответ***: $\varphi_2 = 25$ В.

3.34. Точечный заряд $Q = 5$ нКл в некоторой точке поля, создаваемого зарядом, обладает потенциальной энергий $W_п = 15$ мкДж. Определите потенциал φ этой точки поля и расстояние r от этой точки до заряда. ***Ответ***: $\varphi = 3$ кВ; $r = 1{,}5$ см.

3.35. Определите потенциал φ электростатического поля в точке, расположенной на одинаковом расстоянии от зарядов $+Q$ и $-Q$. ***Ответ***: $\varphi = 0$.

3.36. Потенциальная энергия $W_п$ системы двух точечных зарядов $Q_1 = 50$ нКл и $Q_2 = 2$ нКл равна 90 мкДж. Определите расстояние r между этими зарядами. ***Ответ***: $r = 1$ см.

3.37. Электростатическое поле создается точечным зарядом $Q = 20$ нКл. Определите работу A, совершаемую силами этого поля при перемещении заряда Q_1 =10 нКл из точки с потенциалом $\varphi_1 = 500$ В в точку с потенциалом $\varphi_2 = 200$ В, и расстояние между этими точками. ***Ответ***: $A = 3$ мкДж; $r_2 - r_1 = 54$ см.

3.38. Электростатическое поле в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2{,}2$ создается точечным зарядом $Q = 2$ нКл. Определите разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между двумя точками, расположенными от заряда на расстояниях $r_1 = 5$ см и $r_2 = 20$ см, и работу A, совершаемую силами электростатического поля при перемещении между этими точками заряда $Q_1 = 1$ нКл. ***Ответ***: $\varphi_1 - \varphi_2 = 123$ В; $A = 0{,}123$ мкДж.

3.39. Два точечных одноименных заряда находятся в вакууме на расстоянии $r_1 = 40$ см. Для сближения зарядов до расстояния $r_2 = 10$ см затратили работу $A = 2{,}03$ мкДж. Определите заряд Q_2, если $Q_1 = 2$ нКл. ***Ответ***: $Q_2 = 15$ нКл.

3.40. Какую разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ должен пройти протон, чтобы его скорость увеличилась от $v_1 = 1$ Мм/с до $v_2 = 5$ Мм/с? Заряд протона $Q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг. ***Ответ***: $\varphi_1 - \varphi_2 = 125$ кВ.

3.41. Электрон летит между двумя точками с разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = 200$ В. Определите скорость электрона v_2 в конечной точке, если в начальной точке скорость $v_1 = 0$. ***Ответ***: $v_2 = 8{,}38$ Мм/с.

3.42. В пространстве между двумя горизонтально расположенными пластинами (расстояние между ними $d = 3$ см), заряженными до разности потенциалов $U = 5$ кВ. взвешена пылинка, масса которой $m = 10^{-10}$ кг. Определите заряд Q пылинки. ***Ответ***: $Q = 5{,}89 \cdot 10^{-15}$ Кл.

3.43. В пространстве между двумя горизонтально расположенными пластинами ($d = 10$ мм), заряженными до разности потенциалов $U = 1$ кВ, взвешена капелька масла. Определите радиус r капельки масла, если плотность масла $\rho = 0{,}96$ г/см^3, а заряд капельки Q равен двум элементарным зарядам e. ***Ответ***: $r = 0{,}201$ мкм.

3.44. Металлическая сферическая поверхность радиусом $r = 20$ см заряжена равномерно с поверхностной плотностью $\sigma = 5$ нКл/м^2. Определите напряженность E_0 и потенциал φ_0 электростатического поля в центре сферы. ***Ответ***: $E_0 = 0$; $\varphi_0 = 113$ В.

3.45. Сплошная металлическая сфера радиусом $R = 10$ см несет равномерно распределенный заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ нКл/м^2. Определите напряженность E и потенциал φ электростатического поля: 1) в центре сферы; 2) на расстоянии $r_1 = 15$ см от центра сферы. ***Ответ***: 1) $E_0 = 0$; $\varphi_0 = 11{,}3$ В; 2) $E_1 = 50{,}3$ В/м, $\varphi_1 = 7{,}53$ В.

3.46. Определите радиус R шара, который обладал бы в вакууме электроемкостью $C = 1$ Ф. Сравните его с радиусом Земли ($R_З = 6{,}37 \cdot 10^6$ м). ***Ответ***: $R = 9 \cdot 10^9$ м; $R/R_З = 1\,410$.

3.47. Определите диаметр d шарика, находящегося в вакууме, если его потенциал $\varphi = 500$ В, а поверхностная плотность заряда $\sigma = 8{,}85$ нКл/м^2. ***Ответ***: $d = 1$ см.

3.48. Определите, во сколько раз изменится электроемкость C_2/C_1 проводящего шара, если вначале он был помещен в трансформаторное масло ($\varepsilon_1 = 2{,}2$), а затем — в глицерин ($\varepsilon_2 = 56$). ***Ответ***: в 25,5 раза.

3.49.* Металлический шарик радиусом $R_1 = 5$ см несет заряд $Q = 6$ нКл. Шарик привели в соприкосновение с незаряженным металлическим шариком радиусом $R_2 = 10$ см. Определите заряды Q_1 и Q_2 на шариках после их соприкосновения. ***Ответ***: $Q_1 = 2$ нКл; $Q_2 = 4$ нКл.

3.50.* Два металлических шарика, радиусы которых соответственно равны $R_1 = 1$ см и $R_2 = 2$ см, соединены проводником, электроемкостью которого можно пренебречь. Шарам сообщен заряд $Q = 2$ нКл. Определите поверхностную плотность σ зарядов на шарах. ***Ответ***: $\sigma_1 = 53{,}1 \cdot 10^{-8}$ Кл/м^2; $\sigma_2 = 26{,}5 \cdot 10^{-8}$ Кл/м^2.

3.51. Электроемкость плоского конденсатора $C = 10$ пФ. Определите расстояние d между его пластинами, если площадь пластин $S = 200$ см^2, а пространство между пластинами заполнено парафином ($\varepsilon = 2$). ***Ответ***: $d = 3{,}54$ см.

3.52. Определите, во сколько раз изменится электроемкость конденсатора, если расстояние между его пластинами увеличить в $n = 3$ раза, а площадь пластин увеличить в $m = 6$ раз. ***Ответ***: увеличится в 3 раза.

3.53. Определите расстояние d между пластинами плоского конденсатора, если между ними приложена разность потенциалов $U = 500$ В, причем площадь каждой пластины $S = 50$ см^2, ее заряд $Q = 5$ нКл. Диэлектриком служит эбонит ($\varepsilon = 3$). ***Ответ***: $d = 1{,}33$ см.

3.54. Электроемкость одного конденсатора $C_1 = 1{,}5$ мкФ, второго — $C_2 = 6$ мкФ. Сравните напряжения U_1 и U_2, которые следует подавать на эти конденсаторы, чтобы они накопили одинаковые заряды. ***Ответ***: $U_1/U_2 = 4$.

3.55. Электроемкость одного конденсатора $C_1 = 1{,}5$ мкФ, второго — $C_2 = 6$ мкФ. Сравните заряды Q_1 и Q_2, накопленные на обкладках этих конденсаторов, если на них подается одинаковое напряжение. ***Ответ***: $Q_1/Q_2 = 1/4$.

3.56. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено слоем эбонита ($\varepsilon = 3$). Расстояние между пластинами

$d = 7$ мм, разность потенциалов $U = 1$ кВ. Определите поверхностную плотность σ зарядов на обкладках конденсатора. ***Ответ***: $\sigma = 3{,}79$ мкКл/м^2.

3.57. Между пластинами плоского конденсатора площадью $S = 50$ см^2, заряженного до разности потенциалов $U = 500$ В, находится слой фарфора ($\varepsilon = 5$). Определите поверхностную плотность σ заряда на обкладках конденсатора и его электроемкость C, если напряженность поля в конденсаторе $E = 400$ В/см. ***Ответ***: $\sigma = 1{,}77$ мкКл/м^2; $C = 17{,}7$ пФ.

3.58. К пластинам плоского воздушного конденсатора с расстоянием между ними $d = 3$ мм и площадью $S = 100$ см^2 приложена разность потенциалов $U_1 = 0{,}7$ кВ. В пространство между пластинами конденсатора при включенном источнике питания внесли стекло ($\varepsilon_2 = 7$). Определите разность потенциалов U_2 между пластинами после внесения диэлектрика; электроемкости конденсаторов C_1 и C_2 до и после внесения диэлектрика. ***Ответ***: $U_2 = 700$ В; $C_1 = 29{,}5$ пФ; $C_2 = 207$ пФ.

3.59. К пластинам плоского воздушного конденсатора с расстоянием между пластинами $d = 3$ мм и площадью $S = 100$ см^2 приложена разность потенциалов $U_1 = 0{,}7$ кВ. После отключения конденсатора от источника напряжения в пространство между пластинами внесли стекло ($\varepsilon_2 = 7$). Определите разность потенциалов U_2 между пластинами после внесения диэлектрика; электроемкости конденсаторов C_1 и C_2 до и после внесения диэлектрика. ***Ответ***: $U_2 = 100$ В; $C_1 = 29{,}5$ пФ; $C_2 = 207$ пФ.

3.60. К пластинкам плоского воздушного конденсатора приложена разность потенциалов $U_1 = 1$ кВ. Площадь пластин $S = 50$ см^2 и расстояние между ними $d = 3$ мм. После отключения конденсатора от источника напряжения в пространство между пластинами внесли парафин ($\varepsilon_2 = 2$). Определите разность потенциалов U_2 между пластинами после внесения диэлектрика; емкость конденсаторов C_1, C_2 до и после внесения диэлектрика; поверхностную плотность зарядов σ_1, σ_2 на пластинах до и после внесения диэлектрика. ***Ответ***: $U_2 = 500$ В; $C_1 = 14{,}8$ пФ; $C_2 = 29{,}6$ пФ; $\sigma_1 = \sigma_2 = 2{,}96$ мкКл/м^2.

3.61. Три одинаковых плоских конденсатора (площадь пластин каждого $S = 200$ см^2), между обкладками которых находится фарфор ($\varepsilon = 5$), соединены последовательно. Определите толщину d парафина, если электроемкость $C_б$ батареи конденсаторов равна 120 пФ. ***Ответ***: $d = 2{,}46$ мм.

3.62. Заряд Q каждой обкладки двух последовательно заряженных конденсаторов, электроемкость которых $C_1 = 20$ пФ

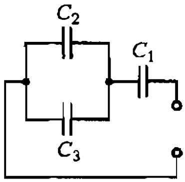


Рис. 71

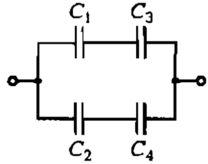


Рис. 72

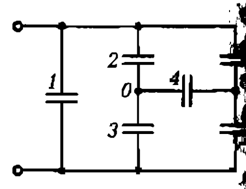


Рис. 73

и C_2 = 40 пФ, равен 10 нКл. Определите напряжения U_1 и U на каждом из конденсаторов; напряжение U на батарее конден саторов. ***Ответ***: U_1 = 500 В, U_2 = 250 В; U = 750 В.

3.63. Электроемкость батареи конденсаторов C = 80 пФ, а за ряд Q = 10 нКл. Батарея состоит из двух последовательно соеди ненных конденсаторов, электроемкость каждого из которых C_1 = 100 пФ. Определите электроемкость C_2 второго конденсатора разность потенциалов U_1 и U_2 на обкладках каждого конденса тора. ***Ответ***: C_2 = 400 пФ; U_1 = 100 В, U_2 = 25 В.

3.64. Плоский воздушный конденсатор, заряженный и зате отключенный от источника напряжения U_1 = 400 В, соединил параллельно с одинаковым по размерам и форме незаряженны конденсатором, между пластинами которого находится ди электрик. Определите диэлектрическую проницаемость ε это диэлектрика, если после соединения конденсаторов разност потенциалов уменьшилась до U = 100 В. ***Ответ***: ε = 3.

3.65. Три конденсатора, электроемкость которых C_1 = 1 мкФ и $C_2 = C_3$ = 2 мкФ (рис. 71), подключены к источнику постоян ного напряжения U = 150 В. Определите общий заряд Q батаре конденсаторов; заряды Q_1, Q_2 и Q_3 на отдельных конденсаторах; разность потенциалов U_1, U_2 и U_3 на отдельных конденсаторах. ***Ответ***: Q = 120 мкКл; Q_1 = 120 мкКл; $Q_2 = Q_3$ = 60 мкКл; U_1 = = 120 В, $U_2 = U_3$ = 30 В.

3.66. Определите электроемкость C батареи конденсаторов (рис. 72), состоящей из четырех конденсаторов электроемкостью C_1 = 1 мкФ, C_2 = 2 мкФ, C_3 = 3 мкФ и C_4 = 4 мкФ. ***Ответ***: C = = 2,18 мкФ.

3.67.* Конденсаторы электроемкостью C каждый соединены так, как показано на рис. 73. Определите электроемкость $C_{общ}$ этого соединения конденсаторов. ***Ответ***: $C_{общ} = 2C$.

3.68.* В каждое ребро куба, изготовленного из проволоки, вклю чено по одному конденсатору электроемкостью C каждый (рис. 74). Определите электроемкость этой батареи конденсаторов, если она включается в цепь проводниками, подсоединенными к противоположным концам (A и B) диагонали куба. ***Ответ***: $C_{общ} = 1,2C$.

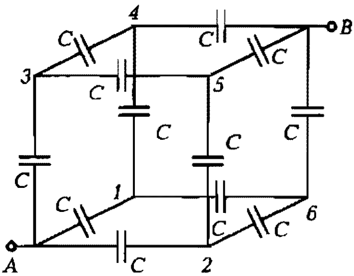


Рис. 74

3.69. Определите потенциал φ заряженного проводящего шара радиусом $r = 10$ см, если он обладает энергией $W = 5$ мкДж. ***Ответ***: $\varphi = 948$ В.

3.70. Определите разность потенциалов $\Delta\varphi$ между обкладками конденсатора, если при сообщении обкладкам конденсатора заряда Q = 10 мкКл его энергия $W = 0,01$ Дж. ***Ответ***: $\Delta\varphi = 2$ кВ.

3.71. Плоский воздушный конденсатор ($\varepsilon_1 = 1$) после зарядки отключили от источника напряжения и поместили в трансформаторное масло ($\varepsilon_2 = 2,2$). Как изменится энергия W_2/W_1, накопленная в конденсаторе? ***Ответ***: $W_2/W_1 = 2,2$.

3.72. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком толщиной $d = 1,5$ см и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 5$. Определите объемную плотность энергии w поля конденсатора, если он заряжен до разности потенциалов $U = 1,5$ кВ. ***Ответ***: $w = 0,221$ Дж/м^3.

3.73. Пространство между круглыми пластинами (радиус которых $r = 2$ см) плоского конденсатора заполнено диэлектриком ($\varepsilon = 3$) толщиной $d = 1,5$ мм. Конденсатор заряжен до напряжения $U = 1$ кВ. Определите электроемкость C конденсатора, заряд Q на пластинах, энергию W электростатического поля и объемную плотность энергии w поля конденсатора. ***Ответ***: $C = 22,2$ пФ; $Q = 22,2$ нКл; $W = 11,1$ мкДж; $w = 5,89$ Дж/м^3.

3.74. Определите объемную плотность энергии w электростатического поля внутри плоского конденсатора, полностью погруженного в трансформаторное масло ($\varepsilon = 2,2$), если напряженность поля между пластинами конденсатора $E = 10^6$ В/м. ***Ответ***: $w = = 9,74$ Дж/м^3.

3.75. Обкладками плоского воздушного конденсатора служат круглые пластины радиусом $r = 10$ см, расстояние между которыми $d = 10$ см. Определите энергию W и объемную плотность энергии w поля конденсатора, если напряженность электростатического поля между обкладками $E = 1$ кВ/см. ***Ответ***: $W =$ = 139 мкДж; $w = 44,3$ мДж/м^3.

3.76. Плоский воздушный конденсатор электроемкостью $C_1 = 1$ пФ подключен к источнику ЭДС $\mathscr{E} = 500$ В. Отключив конденсатор от источника ЭДС, расстояние между пластинами конденсатора увеличили в $n = 3$ раза. Определите работу внешних сил по раздвижению пластин. ***Ответ***: $A = 250$ нДж.

Глава 11

Постоянный ток

Основные законы и формулы

■* Сила тока

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

■ Сила постоянного тока

$$I = \frac{Q}{t}.$$

■ Плотность тока в проводнике

$$j = \frac{I}{S}, \quad \vec{j} = ne\langle\vec{v}\rangle$$

[S — площадь поперечного сечения проводника; $\langle\vec{v}\rangle$ — средняя скорость упорядоченного движения зарядов в проводнике; n — концентрация зарядов].

■ Электродвижущая сила, действующая в цепи,

$$\mathscr{E} = \frac{A_{\text{ст}}}{Q_0}$$

[$A_{\text{ст}}$ — работа сторонних сил; Q_0 — единичный положительный заряд].

■ Напряжение на участке 1 — 2 цепи

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12}$$

[$(\varphi_1 - \varphi_2)$ — разность потенциалов между точками цепи; $\mathscr{E}_{12}$ — ЭДС, действующая на участке 1 — 2 цепи].

■ Сопротивление R однородного линейного проводника, проводимость G проводника и удельная электрическая проводимость γ вещества проводника:

$$R = \rho\frac{l}{S}; \quad G = \frac{1}{R}; \quad \gamma = \frac{1}{\rho}$$

[ρ — удельное электрическое сопротивление; S — площадь поперечного сечения проводника; l — его длина].

■ Сопротивление проводников:

— при последовательном соединении

$$R=\sum_{i=1}^{n} R_i;$$

— при параллельном соединении

$$\frac{1}{R}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}$$

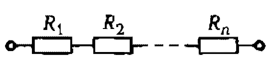
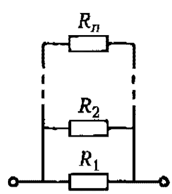
[R_1 — сопротивление i-го проводника; n — число проводников].

■ Зависимость удельного сопротивления ρ материала проводника от его температуры

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$$

[α — температурный коэффициент сопротивления].

Таблица 11.1. Последовательное и параллельное соединения проводников

	Соединение	
	последовательное	параллельное
Схема		
Сохраняющаяся величина	$I = I_1 = I_2 = \ldots = I_n = \text{const}$	$U = U_1 = U_2 = \ldots = U_n = \text{const}$
Суммируемые величины	$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$	$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$
Результирующее сопротивление	$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$	$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\ldots+\frac{1}{R_n}$

■ Закон Ома:

— для однородного участка цепи

$$I=\frac{U}{R};$$

— для неоднородного участка цепи

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12}}{R};$$

— для замкнутой цепи

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}$$

[U — напряжение на участке цепи; R — сопротивление цепи (участка цепи); $(\varphi_1 - \varphi_2)$ — разность потенциалов на концах участка цепи; $\mathscr{E}_{12}$ — ЭДС источников тока, входящих в участок; $\mathscr{E}$ — ЭДС всех источников тока цепи].

■ Работа тока за время t

$$A = IUt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t.$$

■ Мощность тока

$$P = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}.$$

■ Закон Джоуля — Ленца

$$Q = I^2Rt = IUt$$

[Q — количество теплоты, выделяющейся в участке цепи за время t при прохождении тока].

■ Правила Кирхгофа

$$I_1R_1 + I_2R_2 + \dots + I_nR_n = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \dots + \mathscr{E}_n;$$

$$I_1 + I_2 + \dots + I_n = 0.$$

Примеры решения задач

1 По проводнику, изготовленному из алюминия ($\rho = 2{,}7$ г/см^3; $M = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) сечением $S = 0{,}4$ мм^2, течет ток $I = 0{,}5$ А. Определите среднюю скорость $\langle v \rangle$ упорядоченного (направленного) движения электронов, считая, что число свободных электронов n в единице объема проводника равно числу атомов n' в единице объема проводника.

Дано: $\rho = 2{,}7$ г/см^3 = $2{,}7 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3; $M = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $S = 0{,}4$ мм^2 = $0{,}4 \cdot 10^{-6}$ м^2; $I = 0{,}5$ А; $n = n'$.

Найти: $\langle v \rangle$.

Решение. Плотность тока в проводнике

$$j = ne\langle v \rangle, \qquad (1)$$

где $\langle v\rangle$ — средняя скорость упорядоченного движения электронов в проводнике; n — концентрация электронов (число электронов в единице объема); $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл — заряд электрона.

Согласно условию задачи,

$$n = n' = \frac{N}{V} = \frac{\nu N_A}{V} = \frac{\frac{m}{M}N_A}{V} = \frac{\rho N_A}{M} \qquad (2)$$

(учли, что $N = \nu N_A = \frac{m}{M}N_A$, где m — масса проводника; M — его молярная масса; $N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро; $\rho = \frac{m}{V}$ — плотность алюминия).

Учитывая формулу (2) и формулу $j = \frac{I}{S}$, выражение (1) можно записать в виде

$$\frac{I}{S} = \frac{\rho N_A}{M}e\langle v\rangle,$$

откуда искомая скорость упорядоченного движения электронов

$$\boxed{\langle v\rangle = \frac{IM}{\rho N_A eS}}$$

$$[\langle v\rangle] = \frac{\text{А}\cdot\text{кг/моль}}{\text{кг/м}^3\cdot\text{моль}^{-1}\cdot\text{Кл}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Кл}} = \frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \text{м/с}.$$

Ответ: $\langle v\rangle \approx 1{,}3\cdot10^{-4}$ м/с.

2 Определите общее сопротивление R между точками A и B цепи проводников в виде шестиугольника (рис. 75). Сопротивление каждой проволоки $r = 2{,}5$ Ом.

Дано: $r = 2{,}5$ Ом.

Найти: R.

Решение. В силу симметрии токи, текущие по сопротивлениям 8, 9, 11 и 12, одинаковы. Поэтому ток через узел O равен нулю. Тогда схема, представленная на рис. 76, является эквивалентной

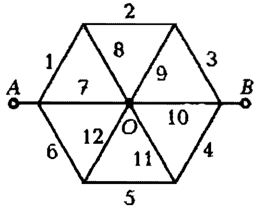


Рис. 75

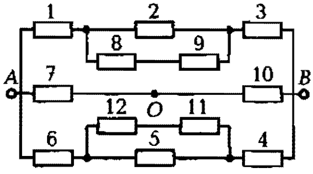


Рис. 76

той, которая задана в виде шестиугольника. Сопротивления 8 и 9 соединены последовательно между собой и параллельно с сопротивлением 2. Тогда

$$R_{8,9,2} = \frac{2}{3}r.$$

Эквивалентное сопротивление $R_{8,9,2}$ соединено последовательно с сопротивлениями 1 и 2, поэтому

$$R_{1\to3} = \frac{2}{3}r + r + r = \frac{8}{3}r.$$

Из схемы следует, что эквивалентное сопротивление $R_{4\to6}$ равно $R_{1\to3}$, т.е.

$$R_{4\to6} = \frac{8}{3}r.$$

Сопротивления $R_{1\to3}$, $R_{4\to6}$, 7 и 10 соединены параллельно, поэтому

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{1\to3}} + \frac{1}{R_{4\to6}} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}.$$

Подставив значения $R_{1\to3}$, $R_{4\to6}$, получим

$$\frac{1}{R} = \frac{3}{8r} + \frac{3}{8r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{5}{4r},$$

откуда искомое общее сопротивление

$$\boxed{R = \frac{4}{5}r}$$

Ответ: $R = 2$ Ом.

3 В цепь, состоящую из источника ЭДС и резистора сопротивлением $R = 100$ Ом, включают вольтметр сначала параллельно, а затем последовательно резистору, причем показания вольтметра одинаковы. Определите внутреннее сопротивление r источника ЭДС, если сопротивление вольтметра $R_V = 500$ Ом.

Дано: $R = 100$ Ом; $R_V = 500$ Ом; $U_1 = U_2$.

Найти: r.

Решение. Согласно условию задачи, вольтметр один раз подключают к резистору параллельно (рис. 77, *а*), второй — последовательно (рис. 77, *б*), причем показания вольтметра одинаковы.

Силу тока найдем согласно закону Ома для замкнутой цепи:

— при параллельном соединении

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{\frac{RR_V}{R+R_V}+r};$$

— при последовательном соединении

$$I_2 = \frac{\mathscr{E}}{R+R_V+r},$$

где $\mathscr{E}$ — ЭДС источника.

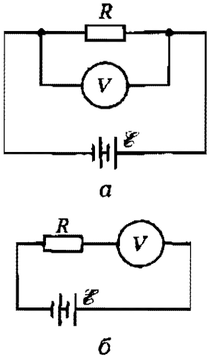


Рис. 77

Падение напряжения на вольтметре:

— при параллельном соединении

$$U_1 = \frac{\mathscr{E}}{\frac{RR_V}{R+R_V}+r}\frac{RR_V}{R+R_V} \qquad (1)$$

($\frac{RR_V}{R+R_V}$ — сопротивление параллельно соединенных вольтметра и резистора);

— при последовательном соединении

$$U_2 = \frac{\mathscr{E}}{R+R_V+r}R_V. \qquad (2)$$

Приравняв выражения (1) и (2), согласно условию $U_1 = U_2$, получим

$$\frac{RR_V}{\left(\frac{RR_V}{R+R_V}+r\right)(R+R_V)} = \frac{R_V}{R+R_V+r},$$

или

$$\frac{R}{RR_V+Rr+R_Vr} = \frac{1}{R+R_V+r},$$

откуда находим искомое внутреннее сопротивление

$$\boxed{r = \frac{R^2}{R_V}}$$

Ответ: $r = 20$ Ом.

4 В приведенной на рис. 78 электрической схеме моста Уитстона заданы сопротивления R_2, R_3, R_4, электродвижущая сила $\mathscr{E}$ источника тока и его внутреннее сопротивление r. Определите

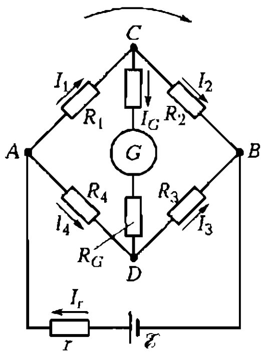


Рис. 78

сопротивление R_1, если известно, что ток в цепи гальванометра G отсутствует ($I_G = 0$). Сопротивление гальванометра равно R_G.

Дано: R_2, R_3, R_4, $\mathscr{E}$, r, I_G, R_G.

Найти: R_1.

Решение. Выберем направление токов в различных ветвях контура и направление обхода, как показано на рис. 78. Для узлов A, B и C, применяя первое правило Кирхгофа, получим

$$\begin{cases} I_r - I_1 - I_4 = 0, \\ I_2 + I_3 - I_r = 0, \\ I_1 - I_2 - I_G = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Для контуров $ACBDA$, $ACDA$ и $CBDC$, согласно второму правилу Кирхгофа, можно записать

$$\begin{cases} I_r r + I_1 R_1 + I_2 R_2 = \mathscr{E}, \\ I_1 R_1 + I_G R_G - I_4 R_4 = 0, \\ I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_G R_G = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

По условию задачи $I_G = 0$ (ток в цепи гальванометра отсутствует), поэтому из системы уравнений (1) найдем:

$$I_1 = I_2 \text{ и } I_3 = I_4, \qquad (3)$$

а из системы (2) получим

$$I_1 R_1 = I_4 R_4,\ I_2 R_2 = I_3 R_3. \qquad (4)$$

Из равенств (3) и (4) вытекает, что

$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3},$$

откуда искомое сопротивление

$$\boxed{R_1 = \frac{R_2 R_4}{R_3}}$$

Таким образом, в случае *равновесного моста* ($I_G = 0$) при определении искомого сопротивления R_1 ЭДС батареи, сопротивления батареи и гальванометра роли не играют.

Ответ: $R_1 = \dfrac{R_2 R_4}{R_3}$.

5 Определите мощность P_1 тока во внешней цепи при силе тока $I_1 = 2$ А, если при силе тока $I_2 = 3$ А мощность $P_2 = 6$ Вт, а внутреннее сопротивление r равно 0,5 Ом.

Дано: $I_1 = 2$ А; $I_2 = 3$ А; $P_2 = 6$ Вт; $r = 0{,}5$ Ом.

Найти: P_1.

Решение. Мощности, развиваемые токами I_1 и I_2, соответственно равны

$$P_1 = I_1^2 R_1; \quad P_2 = I_2^2 R_2, \tag{1}$$

где R_1 и R_2 — сопротивления резисторов внешней цепи.

Согласно закону Ома,

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + r}; \quad I_2 = \frac{\mathscr{E}}{R_2 + r}, \tag{2}$$

где $\mathscr{E}$ — ЭДС источника. Тогда

$$\mathscr{E} = I_1 R_1 + I_1 r,$$

$$\mathscr{E} = I_2 R_2 + I_2 r_2,$$

или

$$I_1 R_1 + I_1 r = I_2 R_2 + I_2 r.$$

Решив это уравнение относительно r, получим

$$r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1}. \tag{3}$$

Из уравнений (1) найдем

$$I_1 R_1 = \frac{P_1}{I_1}, \quad I_2 R_2 = \frac{P_2}{I_2}.$$

Подставив эти выражения в формулу (3), вычислим внутреннее сопротивление

$$r = \frac{P_1/I_1 - P_2/I_2}{I_2 - I_1},$$

откуда искомая мощность тока

$$\boxed{P_1 = I_1\left[r(I_2 - I_1) + \frac{P_2}{I_2}\right]}$$

$$[P_1] = \text{А}\left[\text{Ом}\cdot\text{А} + \frac{\text{Вт}}{\text{А}}\right] = \text{Ом}\cdot\text{А}^2 + \text{Вт} = \text{Ом}\cdot\text{А}\cdot\frac{\text{В}}{\text{Ом}} + \text{Вт} = \text{А}\cdot\text{В} + \text{Вт} = \text{Вт} + \text{Вт}.$$

Ответ: $P_1 = 5$ Вт.

6 Сопротивление второго проводника R_2 в четыре раза больше, чем сопротивление первого R_1. Их сначала включают в цепь последовательно, а затем — параллельно. Определите отношение количеств теплоты, выделившейся в этих проводниках, для обоих случаев.

Дано: $R_2 = 4R_1$; 1) последовательно; 2) параллельно.

Найти: $\frac{Q_1}{Q_2}$.

Решение. 1) *При последовательном соединении проводников* $I = \text{const}$. Согласно закону Джоуля — Ленца, количество теплоты, выделившейся в первом и втором проводниках,

$$Q_1 = \frac{U_1^2}{R_1}t, \quad Q_2 = \frac{U_2^2}{R_2}t, \qquad (1)$$

где t — время прохождения тока через проводники; U_1 и U_2 — соответственно разность потенциалов между концами первого и второго проводников.

Учитывая, что $I_1 = I_2$, т. е. $\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}$, или $\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$, из формул (1) найдем отношение

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{U_1^2 R_2}{U_2^2 R_1} = \frac{R_1^2 R_2}{R_2^2 R_1} = \frac{R_1}{R_2}.$$

$$\boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}}$$

2) *При параллельном соединении проводников* $U = \text{const}$. Из формул (1) получаем отношение

$$\boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$

Ответ: 1) $\frac{Q_1}{Q_2} = 0{,}25$; 2) $\frac{Q_1}{Q_2} = 4$.

Задачи для самостоятельного решения

3.77. Какова будет плотность тока j, если за время $t = 5$ с через проводник сечением $S = 2$ мм^2 пройдет $N = 5 \cdot 10^{19}$ электронов? ***Ответ***: $j = 8 \cdot 10^5$ А/м^2.

3.78. Определите число N электронов, проходящих через поперечное сечение проводника за 1 с, если по нему течет постоянный ток $I = 1{,}6$ А. ***Ответ***: $N = 10^{19}$.

3.79. Принимая, что на каждый атом серебра приходится один электрон, определите концентрацию электронов проводимости в серебре. Плотность серебра $\rho = 10{,}5$ г/см^3, его молярная масса $M = 108 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. ***Ответ***: $n = 5{,}85 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$.

3.80. По проводнику сечением $S = 30$ мм^2 течет постоянный ток. Определите силу I и плотность j тока в этом проводнике, если средняя скорость упорядоченного движения зарядов в нем $\langle v \rangle = 0{,}21$ мм/с, а их концентрация $n = 7{,}29 \cdot 10^{27}$ м$^{-3}$. ***Ответ***: $I = 7{,}35$ А; $j = 2{,}45 \cdot 10^4$ М/м^2.

3.81. Определите силу тока I, создаваемую электроном, вращающимся вокруг ядра атома водорода, если радиус орбиты $r = 52{,}8$ пм. ***Ответ***: $I = 33{,}4$ мкА.

3.82. Определите плотность тока j в медном проводнике длиной $l = 12$ м, если он находится под напряжением $U = 6$ В. Удельное сопротивление меди $\rho = 17$ нОм·м. ***Ответ***: $j = 29{,}4$ МА/м^2.

3.83. Определите работу сторонних сил $A_{ст}$ за время $t = 5$ мин источника с ЭДС $\mathscr{E} = 6$ В, если сила тока I в приборе, подключенном к источнику, равна 1 А. ***Ответ***: $A_{ст} = 1{,}8$ кДж.

3.84. Определите падение напряжения U на проводнике сопротивлением $R = 1{,}5$ Ом, если за время $t = 1$ мин по проводнику прошел заряд $Q = 80$ Кл. ***Ответ***: $U = 2$ В.

3.85. Гальванический элемент с ЭДС $\mathscr{E} = 1{,}2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}5$ Ом замкнут на внешнее сопротивление $R = 2{,}5$ Ом. Определите силу тока I в цепи, падение напряжения U_1 во внутренней части цепи, напряжение U_2 на зажимах элемента. ***Ответ***: $I = 0{,}4$ А; $U_1 = 0{,}2$ В; $U_2 = 1$ В.

3.86. При подключении электрического прибора к источнику с ЭДС $\mathscr{E} = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом напряжение на клеммах источника $U = 10$ В. Определите силу тока I в цепи, работу сторонних сил $A_{ст}$ источника за время $t = 2{,}5$ мин, работу A во внешней цепи за то же время. ***Ответ***: $I = 2$ А; $A_{ст} = 3{,}6$ кДж; $A = 3$ кДж.

3.87. ЭДС аккумулятора $\mathscr{E} = 24$ В. Определите внутреннее сопротивление r аккумулятора, если при силе тока $I = 4$ А его КПД $\eta = 0{,}7$. ***Ответ***: $r = 1{,}8$ Ом.

3.88. Определите внутреннее сопротивление r и ЭДС $\mathscr{E}$ батареи аккумуляторов, если при внешнем сопротивлении $R_1 = 16$ Ом амперметр показал силу тока в цепи $I_1 = 1$ А, а при внешнем сопротивлении $R_2 = 8$ Ом — силу тока $I_2 = 1{,}8$ А. ***Ответ***: $r = 2$ А; $\mathscr{E} = 18$ В.

3.89. Определите удельное сопротивление ρ алюминия, если сопротивление R алюминиевой проволоки диаметром $d = 0{,}2$ мм и длиной $l = 1{,}5$ м равно 1,24 Ом. ***Ответ***: $\rho = 26$ нОм·м.

3.90. Определите сопротивление R алюминиевой проволоки массой $m = 1{,}5$ кг и площадью поперечного сечения $S = 0{,}15$ мм^2.

Плотность алюминия $\rho_0 = 2{,}7$ г/см^3, его удельное сопротивление $r = 26$ нОм·м. ***Ответ***: $R = 642$ Ом.

3.91. Электролампа с вольфрамовой нитью длиной $l = 5$ см при температуре $t = 2\,400$ °С обладает сопротивлением $R = 170$ Ом. Определите диаметр d нити, если удельное сопротивление вольфрама $\rho_0 = 53$ нОм·м, его температурный коэффициент сопротивления $\alpha = 0{,}005$ °С$^{-1}$. ***Ответ***: $d = 0{,}7$ мкм.

3.92. Определите плотность тока j в медном проводнике длиной $l = 10$ м при температуре $t = 27$ °С, если напряжение на концах проводника $U = 110$ В. Удельное сопротивление меди при 0 °С равно 15,8 нОм·м; температурный коэффициент сопротивления $\alpha = \frac{1}{273}$ К$^{-1}$. ***Ответ***: $j = 6{,}34$ А/м^2.

3.93.* Определите общее сопротивление R цепи, приведенной на рис. 79, если все сопротивления одинаковы и равны r. ***Ответ***: $R = \frac{37}{12}r$.

3.94. Сопротивление однородной проволоки $R = 144$ Ом. Определите, на сколько равных частей N следует разрезать проволоку, чтобы после их параллельного соединения общее сопротивление R_1 оказалось равным 4 Ом. ***Ответ***: $N = 6$.

3.95.* Напряжение U между точками A и B цепи (рис. 80) равно 220 В. Определите силу тока I в каждом из резисторов, если сопротивление R всех резисторов одинаково и равно 30 Ом. ***Ответ***: $I_1 = 4$ А; $I_2 = I_3 = 2$ А; $I_4 = I_5 = I_6 = \frac{4}{3}$ А.

3.96.* На рис. 81 $R_1 = R_2 = 50$ Ом, $R_3 = 100$ Ом, $C = 60$ нФ. Определите ЭДС $\mathcal{E}$ источника, пренебрегая его внутренним сопротивлением, если заряд на конденсаторе $Q = 2{,}64$ мкКл. ***Ответ***: $\mathcal{E} = 220$ В.

3.97. Определите ток короткого замыкания $I_{к.з}$ батареи из двух аккумуляторов с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 12$ В и $\mathcal{E}_2 = 6$ В (рис. 82), если их внутренние сопротивления $r_1 = 2$ Ом и $r_2 = 1$ Ом. ***Ответ***: $I_{к.з} = 2$ А.

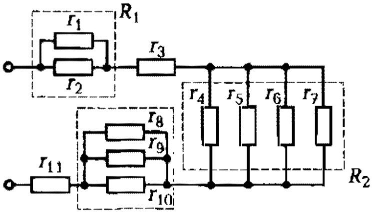


Рис. 79

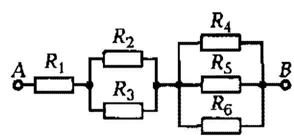


Рис. 80

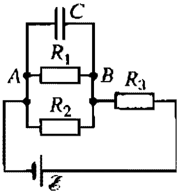


Рис. 81

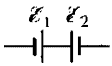


Рис. 82

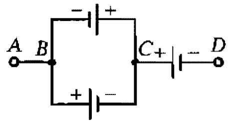


Рис. 83

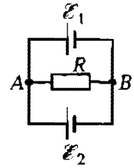


Рис. 84

3.98. Определите внутреннее сопротивление $r_б$ и ЭДС $\mathscr{E}$ батареи, состоящей из трех источников (рис. 83), если ЭДС источников $\mathscr{E}_1 = 6$ В, $\mathscr{E}_2 = 10$ В и $\mathscr{E}_3 = 8$ В, а их внутренние сопротивления одинаковы и равны $r = 0{,}2$ Ом. ***Ответ***: $r_б = 0{,}3$ Ом; $\mathscr{E} = 10$ В.

3.99. Определите сопротивление внешней цепи R, при котором сила тока в ней будет одинакова при параллельном и последовательном соединениях n одинаковых источников ЭДС в батарею, если внутренние сопротивления источников одинаковы и равны r. ***Ответ***: $R = r$.

3.100. Батарея из n источников с одинаковыми ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренними сопротивлениями r подключается к резистору сопротивлением R. Определите напряжение U на внешней части цепи: 1) при последовательном соединении источников ЭДС; 2) при параллельном соединении источников ЭДС. ***Ответ***: 1) $U_1 = \dfrac{n\mathscr{E}R}{R+nr}$; $U_2 = \dfrac{\mathscr{E}R}{R+\dfrac{r}{n}}$.

3.101. Два источника, ЭДС которых $\mathscr{E}_1 = 2$ В и $\mathscr{E}_2 = 4$ В, соединены, как показано на рис. 84. Внешнее сопротивление $R = 1$ Ом а внутренние сопротивления источников $r_1 = r_2 = r = 0{,}5$ Ом. Определите силы токов, протекающих через внешнее сопротивление (I_R) и источники (I_1, I_2). ***Ответ***: $I_R = 2{,}4$ А; $I_1 = -0{,}8$ А; $I_2 = 3{,}2$ А.

3.102. Два источника с ЭДС $\mathscr{E}_1 = 5$ В и $\mathscr{E}_2 = 3$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 1$ Ом и $r_2 = 0{,}5$ Ом включены параллельно резистору сопротивлением $R = 3$ Ом. Определите силу тока I через это сопротивление. ***Ответ***: $I = 1{,}1$ А.

3.103.* На рис. 85 $\mathscr{E}_1 = 10$ В, $\mathscr{E}_2 = 20$ В, $\mathscr{E}_3 = 40$ В, а сопротивления $R_1 = R_2 = R_3 = R = 10$ Ом. Определите силы токов, протекающих через сопротивления (I) и через источники ЭДС (I'). Внутренние сопротивления источников ЭДС не учитывать. ***Ответ***: $I_1 = 1$ А; $I_2 = 3$ А; $I_3 = 2$ А; $I_1' = 2$ А; $I_2' = 0$; $I_1' = 3$ А.

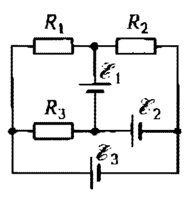


Рис. 85

3.104. К концам проводника сопротивлением $R = 6$ Ом приложено напряжение $U = 12$ В. Определите за время $t = 0{,}5$ мин заряд Q, прошедший по проводнику, и работу A тока. ***Ответ:*** $Q = 60$ Кл; $A = 720$ Дж.

3.105.* Определите расстояние L, на которое можно передавать электрическую энергию от источника ЭДС $\mathscr{E} = 10$ кВ с помощью алюминиевых проводов, сечение которых $S = 1$ мм^2, чтобы на нагрузке сопротивлением $R = 2$ кОм выделялась мощность $P = 10$ кВт. Внутренним сопротивлением источника пренебречь. Удельное сопротивление алюминия $\rho = 26$ нОм·м. ***Ответ:*** $L = 43{,}7$ км.

3.106. Два цилиндрических проводника из меди и нихрома одинаковой длины и одинакового сечения соединены один раз последовательно, другой — параллельно. Определите отношение мощностей для этих проводников при указанных соединениях, если удельное сопротивление меди $\rho_1 = 17$ нОм·м, нихрома $\rho_2 = 1$ мкОм·м. ***Ответ:*** $P_1/P_2 = 0{,}017$; $P_1/P_2 = 58{,}8$.

3.107. Определите КПД η электродвигателя подъемного крана, работающего под напряжением $U = 380$ В, если груз массой $m = 1{,}5$ т кран поднимает равномерно на высоту $h = 20$ м за время $t = 1$ мин. Сила тока в обмотке электродвигателя $I = 20$ А. ***Ответ:*** $\eta = 0{,}646$.

3.108. Источник ЭДС ($\mathscr{E} = 220$ В) с внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом замкнут на внешнее сопротивление $R = 300$ Ом. Определите полную P и полезную $P_{пол}$ мощности источника ЭДС. ***Ответ:*** $P = 160$ Вт; $P_{пол} = 159$ Вт.

3.109. Определите внутреннее сопротивление r источника тока, если во внешней цепи при силе тока $I_1 = 2$ А развивается мощность тока $P_1 = 8$ Вт, а при силе тока $I_2 = 3$ А — мощность $P_2 = 9$ Вт. ***Ответ:*** $r = 1$ Ом.

3.110. В электрическом чайнике мощностью $P = 2$ кВт нагревают воду массой $m = 1{,}8$ кг от начальной температуры $t = 20\,^\circ$C до кипения. Определите время t, за которое закипит вода, если КПД чайника $\eta = 0{,}7$, а удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19$ кДж/(кг·К). Какова сила тока I, протекающего по спирали, если напряжение $U = 220$ В? ***Ответ:*** $t = 431$ с; $I = 9{,}09$ А.

3.111. Определите длину l нихромовой проволоки сечением $S = 0{,}1$ мм^2, необходимую для изготовления нагревателя, с помощью которого можно за $t = 4$ мин вскипятить воду массой $m = 1{,}6$ кг, взятую при температуре $t = 20\,^\circ$C. Напряжение в сети $U = 220$ В, КПД нагревателя $\eta = 0{,}85$, удельное сопротивление нихрома $\rho = 1$ мкОм·м (ρ считать постоянным), удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19$ кДж/(кг·К). ***Ответ:*** $l = 2{,}55$ м.

3.112. Определите внутреннее сопротивление r батареи аккумуляторов, если при ее поочередном замыкании на резисторы сопротивлениями R_1 и R_2 выделяется одинаковое количество теплоты. ***Ответ***: $r = \sqrt{R_1 R_2}$.

3.113. Электрический чайник содержит две обмотки. При включении одной обмотки вода в чайнике закипает за время $t_1 = 2$ мин, при включении второй — за $t_2 = 3$ мин. Определите время t, за которое закипит вода в чайнике, если обмотки соединить: 1) последовательно; 2) параллельно. ***Ответ***: 1) $t_3 = 5$ мин; 2) $t_4 = 1{,}2$ мин.

Глава 12

Электрический ток в различных средах

Основные законы и формулы

■ Термоэлектродвижущая сила (термоЭДС) контактов, поддерживаемых при температурах T_1 и T_2,

$$\mathscr{E}_{\text{т}} = \alpha(T_2 - T_1)$$

[α — коэффициент термоЭДС, для большинства металлов составляющий 10^{-5} — 10^{-4} В/К].

■ Первый закон электролиза (первый закон Фарадея)

$$m = kQ \quad \text{или} \quad m = kIt$$

[m — масса вещества, выделившегося на электроде; k — электрохимический эквивалент вещества; Q — заряд, прошедший сквозь электролит; I — сила тока; t — время пропускания тока через электролит].

■ Второй закон электролиза (второй закон Фарадея)

$$k = \frac{1}{N_{\text{А}}e}\frac{M}{n} = \frac{1}{F}\frac{M}{n}$$

[k — электрохимический эквивалент вещества; $F = N_{\text{А}}e$ — постоянная Фарадея ($N_{\text{А}}$ — постоянная Авогадро; e — элементарный электрический заряд); M/n — химический эквивалент вещества (M — молярная масса данного вещества; n — его валентность)].

Примеры решения задач

1 Работа выхода электрона из металла $A = 2{,}2$ эВ. Определите скорость v вылетающего электрона, если он обладает энергией $E = 1{,}5\cdot10^{-18}$ Дж.

Дано: $A = 2{,}2$ эВ $= 2{,}2\cdot1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж; $E = 1{,}5\cdot10^{-18}$ Дж; $m = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг.

Найти: v.

Решение. Энергия вылетающего из металла электрона

$$\frac{mv^2}{2} = E - A,$$

откуда искомая скорость

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2(E-A)}{m}}}$$

(m — масса электрона).

$$[v] = \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}/(\text{с}^2)\cdot\text{м}}{\text{кг}}} = \text{м/с}.$$

Ответ: $v = 1{,}59$ Мм/с.

2 Термоэлемент (датчик температур, состоящий из двух соединенных между собой разнородных металлических проводников) сопротивлением $R = 20$ Ом замкнут на микроамперметр, внутреннее сопротивление которого $r = 400$ Ом. Определите постоянную термоэлемента, если при разности температур его спаев 150 К микроамперметр показывает значение 20 мкА.

Дано: R = 20 Ом; r = 400 Ом; ΔT = 150 К; I = 20 мкА = $= 2\cdot10^{-5}$ А.

Найти: α.

Решение. Термоэлектродвижущая сила

$$\mathscr{E}_\text{т} = \alpha\Delta T, \qquad (1)$$

где α — постоянная термоэлемента; ΔT — разность температур спаев.

Согласно закону Ома, сила тока в цепи термоэлемента

$$I = \frac{\mathscr{E}_\text{т}}{R + r}, \qquad (2)$$

где $\mathscr{E}_\text{т}$ — термоЭДС.

Подставив $\mathscr{E}_\text{т}$, согласно (2), в формулу (1), найдем искомую постоянную термоэлемента

$$\boxed{\alpha = \frac{I(R+r)}{\Delta T}}$$

$$[\alpha] = \frac{\text{А}\cdot\text{Ом}}{\text{К}} = \text{В/К}.$$

Ответ: $\alpha = 5{,}6\cdot10^{-5}$ В/К.

3 Определите минимальную скорость υ_{min} электрона, необходимую для ионизации атома ртути, если потенциал ионизации атома ртути $U_i = 10{,}4$ В.

Дано: $U_i = 10{,}4$ В; $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл; $m = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг.

Найти: υ_{min}.

Решение. Потенциал ионизации атома — разность потенциалов, которую должен пройти электрон, чтобы при ударе об атом его ионизовать. Следовательно, минимальную скорость электрона, требуемую для ионизации атома, можно найти из условия

$$eU_i = \frac{m\upsilon_{min}^2}{2},$$

откуда искомая минимальная скорость

$$\boxed{\upsilon_{min} = \sqrt{\frac{2eU_i}{m}}}$$

$$[\upsilon_{min}] = \sqrt{\frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}/(\text{с}^2)\cdot\text{м}}{\text{кг}}} = \text{м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_{min} = 1{,}91$ Мм/с.

4 При электролизе медного купороса за время $t = 0{,}5$ ч выделилось $m = 0{,}2$ г меди. Определите плотность тока j, если площадь S каждого электрода равна 60 см^2.

Дано: $t = 0{,}5$ ч $= 1\,800$ с; $m = 0{,}2$ г $= 0{,}2\cdot10^{-3}$ кг; $S = 60$ см^2 $=$ $= 60\cdot10^{-4}$ м^2.

Найти: j.

Решение. Плотность тока

$$j = \frac{I}{S}, \qquad (1)$$

где I — сила тока; S — площадь электрода.

Согласно первому закону электролиза, масса вещества, выделившегося на электроде,

$$m = kIt,$$

где k — электрохимический эквивалент вещества,

$$I = \frac{m}{kt}. \qquad (2)$$

Электрохимический эквивалент вещества, согласно второму закону электролиза,

$$k = \frac{1}{N_A e}\frac{M}{n}, \qquad (3)$$

где постоянная Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, элементарный электрический заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, молярная масса меди $M =$ $= 63{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $n = 2$ (валентность меди).

Подставив формулу (3) в (2), а затем (2) в (1), найдем искомую плотность тока

$$\boxed{j = \frac{mN_A en}{MSt}}$$

$$[j] = \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{Кл}}{\text{кг}/(\text{моль}) \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{А}}{\text{м}^2}.$$

Ответ: $j = 56{,}2$ А/м^2.

5 Две электролитические ванны с растворами $FeCl_3$ и $CuSO_4$ соединены последовательно. После размыкания цепи в первой ванне выделилось $m_1 = 8$ г железа. Определите массу меди m_2, выделившуюся во второй ванне.

Дано: $n_1 = 3$; $M_1 = 55{,}7 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $m_1 = 8$ г $= 8 \cdot 10^{-3}$ кг; $n_2 = 2$; $M_2 = 63 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Найти: m_2.

Решение. Поскольку электролитические ванны соединены последовательно, через них текут одинаковые токи, и заряд, прошедший через каждую из ванн, также одинаков:

$$Q_1 = Q_2 = Q.$$

Согласно первому и второму законам электролиза,

$$m = kQ \quad \text{и} \quad k = \frac{1}{N_A e}\frac{M}{n},$$

где m — масса вещества, выделившегося на электроде; k — электрохимический эквивалент; постоянная Авогадро $N_A =$ $= 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$; элементарный заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл; M — молярная масса; n — валентность. Тогда

$$m_1 = \frac{1}{N_A e}\frac{M_1}{n_1}Q \text{ и } m_2 = \frac{1}{N_A e}\frac{M_2}{n_2}Q.$$

Из этих уравнений находим искомую массу меди, выделившейся во второй ванне:

$$\boxed{m_2 = m_1 \frac{M_2 n_1}{M_1 n_2}}$$

Ответ: $m_2 = 13{,}7$ г.

Задачи для самостоятельного решения

3.114. Платина и серебро приведены в контакт. Определите контактную разность потенциалов $\varphi_{Pt} - \varphi_{Ag}$ между металлами, если работа выхода электронов из металлов соответственно равна: для платины 6,3 эВ, для серебра 4,7 эВ. ***Ответ***: $\varphi_{Pt} - \varphi_{Ag} = 1{,}6$ В.

3.115. Определите работу выхода A электрона из цинка, если скорость вылетающего электрона $v = 8{,}89 \cdot 10^5$ м/с и он обладает энергией $E = 10^{-18}$ Дж. ***Ответ***: $A = 6{,}4 \cdot 10^{-19}$ Дж = 4 эВ.

3.116. Определите потенциал ионизации U_i атома водорода, если минимальная скорость v_{min} электрона, необходимая для его ионизации, составляет 2,19 Мм/с. ***Ответ***: $U_i = 13{,}6$ В.

3.117. Определите температуру T, при которой атомы водорода имеют среднюю кинетическую энергию поступательного движения, достаточную для ионизации. Потенциал ионизации атома водорода $U_i = 13{,}6$ В. ***Ответ***: $T = 1{,}05 \cdot 10^5$ = К.

3.118. Определите термоэлектродвижущую силу $\mathscr{E}_т$ термопары железо — константан, если холодный слой термопары находится в сосуде с тающим льдом, а горячий спай — при температуре $t_2 = 200\,^\circ$C. Постоянную термопары α принять равной $5{,}3 \cdot 10^{-5}$ В/К. ***Ответ***: $\mathscr{E}_т = 1{,}06 \cdot 10^{-2}$ В.

3.119. Определите промежуток времени t, за который при электролизе водного раствора хлорной меди $CuCl_2$ на катоде при силе тока $I = 2{,}5$ А выделится медь массой $m = 5$ г. Молярная масса меди $M = 63{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. ***Ответ***: $t = 1{,}68$ ч.

3.120. Определите, во сколько раз электрохимический эквивалент серебра больше электрохимического эквивалента меди. Молярные массы $M_{Ag} = 108 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $M_{Cu} = 63{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. ***Ответ***: в 3,4 раза.

3.121. С помощью электролиза было добыто серебро массой $m_1 = 3$ кг. Определите массу m_2 меди, которую можно получить, пропуская через соответствующий электролит то же количество электричества. Молярная масса серебра $M_1 = 108 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, меди — $M_2 = 63{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. ***Ответ***: $m_2 = 0{,}882$ кг.

3.122. Производя электролиз воды при силе тока $I = 2{,}5$ А, за время $t = 30$ мин под давлением $p = 120$ кПа получили кислород объемом $V = 0{,}5$ л. Определите температуру T кислорода. ***Ответ***: $T = 309$ К.

3.123. Металлическое изделие покрывают слоем никеля (валентность никеля $n = 2$) при плотности тока j в электролитической ванне 0,35 мА/мм^2. Определите время t, за которое толщина h слоя никеля достигнет 50 мкм. Молярная масса никеля $M = 58{,}7 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, плотность $\rho = 8{,}8$ г/см^3. ***Ответ***: $t = 68{,}8$ мин.

3.124. Определите количество электроэнергии W, которую следует затратить для выделения в процессе электролиза алюминия массой $m = 1$ кг, если электролиз проводится при напряжении $U = 10$ В, а КПД процесса $\eta = 0{,}7$. Молярная масса алюминия $M = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, валентность $n = 3$. ***Ответ***: $W = 1{,}53 \cdot 10^{-8}$ Дж $= 42{,}5$ кВт·ч.

3.125.* Две электролитические ванны (1 и 2) с растворами хлористого железа $FeCl_2$ и хлорного железа $FeCl_3$ соединены последовательно. Определите массу железа, выделившегося на каждом аноде, и хлора на каждом катоде при пропускании через них заряда $Q = 9$ МКл. Молярная масса железа $M_{Fe} = 55{,}8 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, хлора $M_{Cl} = 35{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. ***Ответ***: $(m_{Fe})_1 = 2{,}61$ кг; $(m_{Fe})_2 = 1{,}74$ кг; $m_{Cl} = 3{,}32$ кг.

Глава 13

Магнитное поле

Основные законы и формулы

■ Закон Ампера

$$\Delta F = IB\Delta l \sin\alpha$$

[ΔF — модуль силы, действующей на малый участок проводника Δl с током I, помещенного в однородное магнитное поле с индукцией B; α — угол между вектором $\vec{B}$ и элементом проводника с током].

■ Связь между векторами магнитной индукции в вакууме и в однородной и изотропной среде

$$\vec{B} = \mu\vec{B}_0$$

[$\vec{B}_0$ — магнитная индукция поля, создаваемого проводником с током в вакууме; $\vec{B}$ — магнитная индукция поля, создаваемого тем же проводником в однородной и изотропной среде; μ — магнитная проницаемость среды].

■ Принцип суперпозиции (наложения) магнитных полей

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \ldots + \vec{B}_n$$

[$\vec{B}$ — магнитная индукция результирующего поля; $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \ldots, \vec{B}_n$ — магнитные индукции складываемых полей].

■ Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечно длинным проводником с током I:

$$B = \mu_0\mu\frac{I}{2\pi r}$$

[μ_0 — магнитная постоянная; $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м; μ — магнитная проницаемость среды; r — расстояние от данной точки до оси проводника].

■ Магнитная индукция B в центре кругового проводника с током I

$$B = \mu_0\mu\frac{I}{2R}$$

[μ_0 — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость среды; R — радиус кольца].

■ Магнитная индукция поля внутри соленоида в вакууме и среде

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}; \qquad B = \mu_0 \mu \frac{NI}{l}$$

[μ_0 — магнитная постоянная; l — длина соленоида; N — число его витков; I — сила тока; μ — магнитная проницаемость среды].

■ Сила взаимодействия двух прямых бесконечных прямолинейных параллельных проводников с токами I_1 и I_2

$$\Delta F = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2 I_1 I_2}{R} \Delta l$$

[R — расстояние между проводниками; Δl — отрезок проводника].

■ Сила Лоренца

$$F_{\text{л}} = QvB \sin\alpha$$

[Q — заряд частицы; v — ее скорость; B — магнитная индукция; α — угол между векторами скорости $\vec{v}$ и магнитной индукции $\vec{B}$].

■ Формула Лоренца

$$F = QE + QvB \sin\alpha$$

[Q — заряд частицы, движущейся со скоростью v; E — напряженность электрического поля; B — индукция магнитного поля; α — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$].

■ Магнитный момент контура с током I

$$p_m = IS$$

[S — площадь контура с током].

■ Механический (вращающий) момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле с индукцией B,

$$M = Bp_m \sin\alpha$$

[p_m — магнитный момент контура с током; α — угол между вектором нормали к поверхности рамки и вектором магнитной индукции].

■ Магнитный поток сквозь поверхность S

$$\Phi = BS \cos\alpha$$

[B — индукция магнитного поля; α — угол между вектором $\vec{B}$ и положительной нормалью к площади этой поверхности].

■ Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

$$A = I\Delta\Phi$$

[$\Delta\Phi$ — магнитный поток, пересеченный движущимся проводником].

Примеры решения задач

1 По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам, расстояние между которыми $d = 15$ см, текут токи $I_1 = 70$ А и $I_2 = 50$ А в противоположных направлениях. Определите магнитную индукцию B в точке A, удаленной на $r_1 = 20$ см от первого и на $r_2 = 30$ см от второго проводника (рис. 86).

Дано: $d = 15$ см $= 0{,}15$ м; $I_1 = 70$ А; $I_2 = 50$ А; $r_1 = 20$ см $= 0{,}2$ м; $r_2 = 30$ см $= 0{,}3$ м.

Найти: B.

Решение. На рис. 86 изображены два параллельных прямолинейных проводника с токами I_1 (направлен перпендикулярно чертежу к нам) и I_1 (направлен перпендикулярно чертежу от нас). Индукция магнитного поля в точке A, согласно принципу суперпозиции,

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2,$$

где $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ — индукция магнитных полей, созданных в этой точке соответственно проводниками с токами I_1 и I_2 (векторы $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ направлены из точки A по касательным к линиям магнитной индукции, т. е. к окружностям радиусами I_1A и I_2A).

Модуль индукции магнитного поля, создаваемого прямым током, определяется (рассматриваем случай вакуума) по формуле

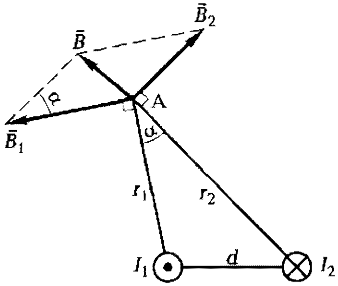


Рис. 86

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi R}. \qquad (1)$$

По теореме косинусов модуль вектора $\vec{B}$

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos\alpha},$$

где

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}; \; B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}; \; \cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}.$$

Подставив эти выражения в формулу (1), найдем искомую магнитную индукцию

$$\boxed{B=\frac{\mu_0}{2\pi}\sqrt{\frac{I_1^2}{r_1^2}+\frac{I_2^2}{r_2^2}-\frac{I_1I_2}{r_1^2r_2^2}\left(r_1^2+r_2^2-d^2\right)}}$$

$$[B]=\frac{\text{Гн}}{\text{м}}\sqrt{\frac{\text{А}^2}{\text{м}^2}}=\text{Н}\cdot\text{А}^2\sqrt{\frac{\text{А}^2}{\text{м}^2}}=\frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}}=\text{Тл}.$$

Ответ: B = 42,8 мкТл.

2 Два параллельных проводника длиной l = 1,5 м каждый находятся в вакууме на расстоянии d = 10 см друг от друга. По проводникам текут токи одинакового направления. Определите силу тока I_2 во втором проводнике, если сила взаимодействия между проводниками F = 3 мН, а сила тока в первом проводнике I_1 = 40 А.

Дано: l = 1,5 м; d = 10 см = 0,1 м; F = 3 нН = $3\cdot10^{-3}$ Н; μ = 1; I_1 = 40 А.

Найти: I_2.

Решение. Токи I_1 и I_2 направлены перпендикулярно чертежу к нам (рис. 87).

Токи создают вокруг себя магнитное поле, линии магнитной индукции которого представляют собой окружности (их направление задано на приведенном рисунке).

По условию задачи $d < l$, поэтому проводники можно считать бесконечно длинными. Тогда индукция магнитного поля, создаваемого проводниками с токами I_1 и I_2:

$$B_1=\mu_0\mu\frac{I_1}{2\pi d},\quad B_2=\mu_0\mu\frac{I_2}{2\pi d}. \tag{1}$$

Направление векторов $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ определяется правилом правого винта.

Согласно закону Ампера, на каждый элемент длины проводника Δl с током I_2 действует в магнитном поле, создаваемом током I_1, сила

$$\Delta F_1 = I_2B_1\Delta l. \tag{2}$$

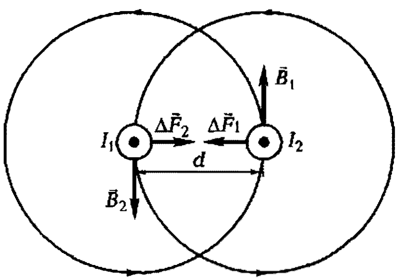


Рис. 87

(ее направление определено по правилу левой руки и указано на рис. 87). Аналогичные рассуждения (ток I_1 находится в магнитном поле, создаваемом током I_2) приводят к выражению

$$\Delta F_2 = I_1 B_2 \Delta l. \qquad (3)$$

Подставив выражения (1) в формулы (2) и (3), найдем

$$\Delta F_1 = \mu_0 \mu \frac{I_1 I_2}{2\pi d} \Delta l$$

и

$$\Delta F_2 = \mu_0 \mu \frac{I_1 I_2}{2\pi d} \Delta l,$$

откуда следует, что $\Delta F_1 = \Delta F_2 = \Delta F$,

$$\Delta F = \mu_0 \mu \frac{I_1 I_2}{2\pi d} \Delta l.$$

Просуммировав это выражение по всем элементам Δl длины проводников, имеем

$$F = \mu_0 \mu \frac{I_1 I_2}{2\pi d} l,$$

откуда находим искомую силу тока во втором проводнике

$$\boxed{I_2 = \frac{2\pi F d}{\mu_0 \mu I_1 l}}$$

$$[I_2] = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Гн}/(\text{м})\cdot\text{А}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Гн}\cdot\text{А}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Вб}/(\text{А})\cdot\text{А}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Вб}} = \frac{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}}{\text{В}\cdot\text{с}} = \text{А}.$$

Ответ: $I_2 = 25$ А.

3 Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 1$ кВ, влетел в однородное магнитное поле, индукция которого $B = 10$ мТл. Скорость электрона v перпендикулярна направлению вектора магнитной индукции. Определите радиус r окружности, по которой движется электрон, и период T вращения этого электрона.

Дано: $U = 1$ кВ $= 10^3$ В; $B = 10$ мТл $= 10^{-3}$ Тл; $\alpha = 90°$; $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Найти: r; T.

Решение. Кинетическая энергия ускоренного электрона $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$, согласно закону сохранения, равна работе, совершенной полем ($A = eU$):

$$\frac{mv^2}{2} = eU,$$

откуда скорость, с которой электрон влетает в магнитное поле,

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \qquad (1)$$

На движущийся электрон в магнитном поле действует сила Лоренца $F_Л = evB \sin\alpha$. По условию задачи $\alpha = 90°$, т. е. $F_Л = evB$. Следовательно, сила Лоренца играет роль центростремительной силы.

Согласно второму закону Ньютона,

$$\frac{mv^2}{r} = evB, \qquad (2)$$

откуда $r = \dfrac{mv}{eB}$. Подставив в эту формулу выражение (1), получим искомый радиус окружности, по которой будет двигаться электрон,

$$\boxed{r = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}} \qquad (3)$$

Период вращения электрона, т. е. время, за которое он совершает один полный оборот,

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \qquad (4)$$

Подставив в формулу (4) выражение (3), найдем искомый период вращения электрона

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{B}\frac{m}{e}}$$

$$[r] = \frac{1}{\text{Тл}}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{В}}{\text{Кл}}} = \frac{1}{\text{Тл}}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{Дж}}{\text{Кл}^2}} = \frac{1}{\text{Тл}\cdot\text{Кл}}\sqrt{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{кг}\cdot\text{м/с}^2} =$$

$$= \frac{\text{кг}\cdot\text{м/с}}{\text{Кл}\cdot\text{Н/(А}\cdot\text{м)}} = \frac{\text{А}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2\text{/с}}{\text{Кл}\cdot\text{Н}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{Н}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}\cdot\text{м/(с}^2)\cdot\text{с}^2} = \text{м},$$

$$[T] = \frac{\text{кг}}{\text{Тл}\cdot\text{Кл}} = \frac{\text{кг}}{\text{Н/(А}\cdot\text{м)}\cdot\text{А}\cdot\text{с}} = \frac{\text{кг}}{\text{кг}\cdot\text{м/(с}^2)\cdot\text{м}\cdot\text{с}} = \text{с}.$$

Ответ: $r = 10{,}7$ мм; $T = 3{,}57$ нс.

4* Электрон влетает в однородное магнитное поле, индукция которого $B = 2$ мТл, со скоростью $v = 7,6$ Мм/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к вектору индукции (рис. 88). Определите радиус R витка и шаг h спирали, по которой будет двигаться электрон.

Дано: $B = 2$ мТл $= 2 \cdot 10^{-3}$ Тл; $v = 7,6$ Мм/с $= 7,6 \cdot 10^6$ м/с; $\alpha = 60^\circ$; $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Найти: R; h.

Решение. Если скорость $\vec{v}$ электрона направлена под углом α к вектору $\vec{B}$, то его движение можно представить в виде суперпозиции: 1) равномерного прямолинейного движения вдоль вектора $\vec{B}$ со скоростью $v_\parallel = v\cos\alpha$; 2) равномерного движения со скоростью $v_\perp = v\sin\alpha$ по окружности в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$. В результате сложения движений возникает движение по спирали.

Сила Лоренца $\vec{F}_{\text{Л}}$ действует на электрон в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$, сообщая ему нормальное ускорение. В результате электрон описывает в этой плоскости окружность радиусом R. Согласно второму закону Ньютона,

$$ev_\perp B = \frac{mv_\perp^2}{R}$$

или

$$evB\sin\alpha = \frac{mv^2\sin^2\alpha}{R},$$

откуда искомое выражение для радиуса витка спирали имеет вид

$$\boxed{R = \frac{mv\sin\alpha}{eB}}$$

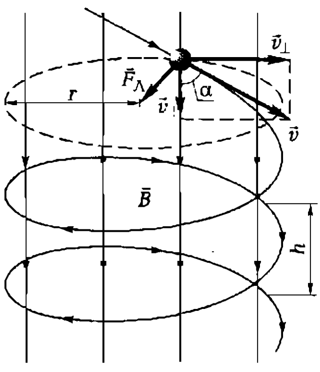


Рис. 88

Шаг спирали равен расстоянию h, на которое смещается электрон вдоль $\vec{B}$ за один оборот:

$$h = v_\parallel T = vT\cos\alpha.$$

Так как $Tv_\perp = 2\pi R$, то

$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi R}{v\sin\alpha},$$

откуда находим искомое выражение для шага спирали

$$h = \frac{2\pi R\cos\alpha}{v\sin\alpha} = \frac{2\pi mv\cos\alpha}{eB}.$$

$$\boxed{h = \frac{2\pi m v \cos\alpha}{eB}}$$

$$[R] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м/с}}{\text{Кл}\cdot\text{Тл}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м/с}}{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{Н/(А}\cdot\text{м)}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{Н}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}\cdot\text{м/(с}^2)\cdot\text{с}^2} = \text{м},$$

$$[h] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м/с}}{\text{Кл}\cdot\text{Тл}} = \text{м (см. предыдущее преобразование).}$$

Ответ: $R = 1{,}87$ см; $h = 6{,}79$ см.

5 Электрон, влетев в однородное магнитное поле с магнитной индукцией $B = 50$ мТл, движется по окружности радиусом $R = 15$ см. Определите магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока.

Дано: $B = 50$ мТл $= 5 \cdot 10^{-2}$ Тл; $R = 15$ см $= 0{,}15$ м; $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Найти: p_m.

Решение. Движение электрона по окружности эквивалентно круговому току, поэтому магнитный момент кругового тока

$$p_m = IS = \frac{e}{T} S, \quad (1)$$

где e — заряд электрона; T — период обращения электрона; S — площадь, которая ограничена окружностью, описываемой электроном.

Период обращения и площадь соответственно равны

$$T = \frac{2\pi R}{v} \text{ и } S = \pi R^2, \quad (2)$$

где R — радиус окружности; v — скорость электрона.

Согласно второму закону Ньютона,

$$ma_n = F_Л,$$

где $a_n = \dfrac{v^2}{R}$ — нормальное ускорение, сообщаемое электрону силой Лоренца,

$$F_Л = evB.$$

Тогда

$$\frac{mv^2}{R} = evB,$$

откуда скорость электрона

$$v = \frac{eBR}{m}. \quad (3)$$

Из выражений (2) и (3) находим период обращения электрона

$$T = \frac{2\pi m}{eB}. \qquad (4)$$

Подставив выражения (4) для T и (2) для S, найдем искомый магнитный момент эквивалентного кругового тока

$$\boxed{p_m = \frac{e^2BR^2}{2m}}$$

$$[p_m] = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{м}} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{Н}/(\text{А} \cdot \text{м}) \cdot \text{м}^2}{\text{кг}} = \frac{E \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{Н}}{\text{м} \cdot \text{кг}} = \frac{\text{А} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Н}} = \text{А} \cdot \text{м}^2.$$

Ответ: $p_m = 15{,}8$ пА · м^2.

6 Определите магнитный момент p_m соленоида (без сердечника) длиной $l = 25$ см, если магнитный поток Ф сквозь площадь поперечного соленоида равен 1,5 мкВб.

Дано: $l = 25$ см $= 0{,}25$ м; $\Phi = 1{,}5$ мкВб $= 1{,}5 \cdot 10^{-6}$ Вб.

Найти: p_m.

Решение. Магнитный момент соленоида, содержащего N витков,

$$p_m = ISN, \qquad (1)$$

где I — сила тока; S — площадь поперечного сечения соленоида.

Магнитный поток сквозь площадь поперечного сечения соленоида

$$\Phi = BS,$$

где магнитная индукция поля внутри соленоида без сердечника

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная). Тогда

$$\Phi = \mu_0 \frac{NI}{l} S,$$

откуда

$$I = \frac{\Phi l}{\mu_0 NS}. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), найдем искомый магнитный момент соленоида

$$\boxed{p_m = \frac{\Phi l}{\mu_0}}$$

$$[p_m] = \frac{\text{Вб}\cdot\text{м}}{\text{Гн/м}} = \frac{\text{Вб}\cdot\text{м}^2}{\text{Гн}} = \frac{\text{Вб}\cdot\text{м}^2}{\text{Вб/А}} = \text{А}\cdot\text{м}^2.$$

Ответ: $p_m = 0{,}299$ А·м^2.

7 На квадратную рамку со стороной $a = 20$ см, находящуюся в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл, нормаль к которой составляет с направлением магнитного поля угол $\alpha = 30°$, действует вращающий момент $M = 0{,}02$ Н·м (рис. 89). Определите площадь сечения $S_{пр}$ проводника, из которого изготовлена рамка, если по ней течет ток, плотность которого $j = 1$ А/мм^2.

Дано: $a = 20$ см $= 0{,}2$ м; $B = 0{,}5$ Тл; $\alpha = 30°$; $M = 0{,}02$ Н·м; $j =$ $= 1$ А/мм^2 $= 10^6$ А/м^2.

Найти: $S_{пр}$.

Решение. Плотность тока в рамке

$$j = \frac{I}{S_{пр}},$$

откуда сила тока

$$I = jS_{пр}. \quad (1)$$

Момент сил (вращающий момент), действующий на рамку с током, которая находится в однородном магнитном поле,

$$M = Bp_m \sin\alpha,$$

где магнитный момент рамки с током $p_m = IS$ (S — площадь поперечного сечения квадратной рамки $S = a^2$). Учитывая эти формулы, запишем

$$M = BIa^2 \sin\alpha. \quad (2)$$

Подставив формулу (1) в выражение (2), имеем

$$M = BjS_{пр}a^2 \sin\alpha,$$

откуда искомая площадь сечения проводника

$$\boxed{S_{пр} = \frac{M}{Bja^2 \sin\alpha}}$$

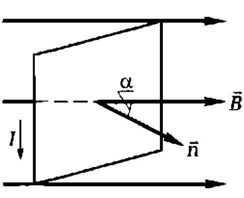


Рис. 89

$$\left[S_{\text{пр}}\right] = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Тл}\cdot\text{А}/(\text{м}^2)\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Н}/(\text{А}\cdot\text{м})\cdot\text{А}} = \text{м}^2.$$

Ответ: $S_{\text{пр}} = 2$ мм^2.

8 В однородном магнитном поле с индукцией $B = 50$ мТл находится прямой проводник длиной $l = 10$ см, расположенный перпендикулярно линиям магнитной индукции. По проводу течет ток $I = 1$ А. Определите работу A сил поля, если провод переместился на расстояние $a = 4$ см.

Дано: $B = 50$ мТл $= 5\cdot10^{-2}$ Тл; $l = 10$ см $= 0{,}1$ м; $I = 1$ А; $a =$ $= 4$ см $= 4\cdot10^{-2}$ м.

Найти: A.

Решение. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

$$A = I\Delta\Phi, \tag{1}$$

где $\Delta\Phi$ — магнитный поток, пересеченный движущимся проводником;

$$\Delta\Phi = BS \tag{2}$$

(учли, что прямой проводник расположен перпендикулярно линиям магнитной индукции, т. е. угол α между вектором $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ к пересекаемой проводником площади поверхности равен нулю). Площадь поверхности, пересекаемой проводником,

$$S = al. \tag{3}$$

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1), найдем искомую работу

$$\boxed{A = IBal}$$

$$[\text{А}] = \text{А}\cdot\text{Тл}\cdot\text{м}^2 = \text{А}\cdot\text{Н}/(\text{А}\cdot\text{м})\cdot\text{м}^2 = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж}.$$

Ответ: $A = 0{,}2$ мДж.

Задачи для самостоятельного решения

3.126. Определите индукцию B_0 магнитного поля в вакууме, если магнитная индукция B в однородной и изотропной среде с магнитной проницаемостью $\mu = 2$ составляет 10 мТл. ***Ответ***: $B_0 = 5$ мТл.

3.127. Определите индукцию B однородного магнитного поля, если на активную часть проводника с током $I = 10$ А длиной

$l = 10$ см, расположенного под углом $\alpha = 45^\circ$ к линиям магнитной индукции, действует сила $F = 50$ мН. ***Ответ***: $B = 0{,}071$ Тл.

3.128. Проводник с током $I = 40$ А расположен перпендикулярно к линиям индукции магнитного поля ($B = 5$ мТл). Определите длину l активной части проводника, если на него со стороны поля действует сила $F = 20$ мН. ***Ответ***: $l = 10$ см.

3.129. Сила тока I в горизонтально расположенном проводнике длиной $l = 10$ см и массой $m = 5$ г равна 15 А. Определите индукцию B магнитного поля, в которое следует поместить проводник, чтобы он находился в равновесии. ***Ответ***: $B = 32{,}7$ мТл.

3.130. Проводник длиной $l = 10$ см (он может перемещаться без трения) с током $I = 20$ А находится в однородном магнитном поле ($B = 10$ мТл), перпендикулярном плоскости контура. Определите работу A, совершенную источником тока, если проводник переместился на расстояние $s = 5$ см. ***Ответ***: $A = 1$ мДж.

3.131. Определите индукцию B магнитного поля прямого тока в вакууме в точке, находящейся на расстоянии $r = 10$ см от проводника, если по проводнику течет ток $I = 60$ А. ***Ответ***: $B = 0{,}12$ мТл.

3.132. Индукция B однородного магнитного поля в вакууме на расстоянии $r = 2{,}5$ см от бесконечно длинного проводника с током равна 0,4 мТл. Определите силу тока I в проводнике. ***Ответ***: $I = 50$ А.

3.133. Определите магнитную индукцию B в вакууме на расстоянии $r = 20$ см от бесконечно длинного прямого проводника с током, если диаметр проводника $d = 4$ мм, а плотность тока j в проводнике равна 1 А/см^2. ***Ответ***: $B = 0{,}126$ мкТл.

3.134. Два бесконечно длинных прямых провода с токами $I_1 = 60$ А и $I_2 = 30$ А, текущими в противоположных направлениях, расположены в воздухе на расстоянии $r = 10$ см друг от друга. Определите магнитную индукцию B поля, создаваемого обоими токами в точке A, которая лежит посередине между проводами. ***Ответ***: $B = 360$ мкТл.

3.135. Два бесконечно длинных прямых провода с токами $I_1 = 60$ А и $I_2 = 30$ А, текущими в одинаковом направлении, расположены в воздухе на расстоянии $r = 10$ см друг от друга. Определите магнитную индукцию B поля, создаваемого обоими токами в точке A, которая лежит посередине между проводами. ***Ответ***: $B = 120$ мкТл.

3.136. Два бесконечно длинных прямых проводника с токами $I_1 = 60$ А и $I_2 = 30$ А, текущими в одинаковом направлении, находятся на расстоянии $r = 9$ см друг от друга в воздухе. Определите, на каком расстоянии d от первого проводника находится точка A, расположенная вдоль прямой, соединяющей эти проводники, в которой индукция магнитного поля равна нулю. ***Ответ***: $d = 6$ см.

3.137. Два бесконечно длинных прямолинейных проводника, по которым в противоположных направлениях текут токи $I_1 = 10$ А и $I_2 = 20$ А, находятся в вакууме на расстоянии $d = 5$ см друг от друга. Определите индукцию B магнитного поля в точке A, расположенной на расстоянии $r_1 = 4$ см от первого проводника и $r_2 = 3$ см от второго. ***Ответ***: $B = 0{,}142$ мТл.

3.138. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам, расстояние между которыми в вакууме $d = 15$ см, текут токи $I_1 = 70$ А и $I_2 = 50$ А в одинаковом направлении. Определите магнитную индукцию B в точке A, удаленной на $r_1 = 20$ см от первого и $r_2 = 30$ см от второго проводника. ***Ответ***: $B = 178$ мкТл.

3.139. Магнитная индукция B в центре кругового проволочного витка в вакууме, по которому течет ток $I = 1$ А, составляет 6,28 мкТл. Определите радиус R витка. ***Ответ***: $R = 10$ см.

3.140. Магнитная индукция B в центре кругового проводника длиной $l = 20$ см равна 15 мкТл. Определите диаметр d проводника, если плотность тока в нем $j = 0{,}1$ А/мм^2. ***Ответ***: $d = 5{,}51$ мм.

3.141. Соленоид без сердечника длиной $l = 1{,}2$ м изготовлен из вплотную прилегающей алюминиевой проволоки диаметром $d = 0{,}4$ мм. Определите индукцию B магнитного поля внутри соленоида, если диаметр витка $D = 3$ см и на концах проводника поддерживается разность потенциалов $U = 10$ В. Удельное сопротивление алюминия $\rho = 26$ нОм·м. ***Ответ***: $B = 537$ мкТл.

3.142. Магнитная индукция B в центре кругового проволочного кольца с током $I = 10$ А из медной проволоки сечением $S = 0{,}4$ мм^2 составляет 5 мкТл. Определите разность потенциалов U между концами проволоки, образующей кольцо. Удельное сопротивление меди $\rho = 17$ нОм·м. ***Ответ***: $U = 3{,}35$ В.

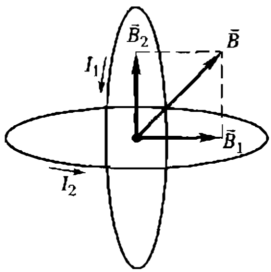


Рис. 90

3.143.* Два кольцевых проводника радиусом $R = 5$ см с токами $I_1 = 2$ А и $I_2 = 5$ А расположены в вакууме в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях (рис. 90). Определите индукцию B магнитного поля в центре этих колец. ***Ответ***: $B = 21{,}5$ мкТл.

3.144.* Круговой виток радиусом $R = 10$ см расположен относительно бесконечно длинного провода так, что его плоскость параллельна проводу. Перпендикуляр, восстановленный на провод из центра витка, является нормалью к плоскости витка. Сила тока в проводе $I_1 = 4$ А, сила тока в витке $I_2 = 5$ А. Расстояние от центра витка до провода $d = 15$ см. Определите магнитную индукцию B в центре витка. ***Ответ***: $B = 31{,}8$ мкТл.

3.145. Длинный прямой соленоид без сердечника из проволоки диаметром $d = 0{,}3$ мм намотан так, что витки вплотную прилегают друг к другу. Пренебрегая толщиной изоляции провода, определите индукцию B магнитного поля внутри соленоида при силе тока $I = 5$ А. ***Ответ***: $B = 20{,}9$ мТл.

3.146. Индукция B магнитного поля на оси бесконечно длинного соленоида без сердечника при силе тока $I = 1$ А составляет 3,14 мТл. Определите диаметр d провода, из которого изготовлена однослойная обмотка соленоида, если ее витки плотно прилегают друг к другу. ***Ответ***: $d = 0{,}4$ мм.

3.147. Определите магнитную индукцию B на оси бесконечно длинного соленоида с никелевым сердечником, если на единицу длины соленоида приходится $n = 100$ витков, сила тока в обмотке соленоида $I = 5$ А, а магнитная проницаемость никеля $\mu = 200$. ***Ответ***: $B = 0{,}126$ Тл.

3.148. Два параллельных проводника длиной $l = 1$ м каждый находятся в вакууме на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. По проводникам текут противоположно направленные токи. Определите силу тока I_2 во втором проводнике, если сила взаимодействия между проводниками $F = 10$ мН, а сила тока в первом проводнике $I_1 = 50$ А. ***Ответ***: $I_2 = 100$ А.

3.149. Два параллельных проводника с одинаковыми токами находятся на расстоянии $r = 8$ см друг от руга и притягиваются с силой $F = 1$ мН. Определите силу тока I в проводниках, если длина l каждого из них 4 м, а токи имеют одинаковое направление. ***Ответ***: $I = 10$ А.

3.150.* По прямому длинному горизонтально расположенному проводу пропускают ток $I_1 = 20$ А. Под проводом на расстоянии $R = 1$ см находится параллельный ему алюминиевый провод, по которому течет ток $I_2 = 2$ А. Определите, какой следует выбрать площадь поперечного сечения S алюминиевого провода, чтобы удержать его незакрепленным. Плотность алюминия $\rho = 2{,}7$ г/см^2. ***Ответ***: $S = 3{,}02 \cdot 10^{-8}$ м^2.

3.151. Два параллельных прямых проводника, по которым текут токи $I_1 = 20$ А и $I_2 = 50$ А, находятся в вакууме на расстоянии $r = 50$ см друг от друга. Определите силу F, действующую на единицу длины l проводника. ***Ответ***: $F = 400$ мкН/м.

3.152. Определите силу тока I в воздушных проводах троллейбусной линии, если они расположены друг от друга на расстоянии $d = 0{,}6$ м и на каждый элемент $\Delta l = 1$ м длины проводов действует сила $\Delta F = 1{,}34$ Н. ***Ответ***: $I = 2$ кА.

3.153. Вычислите значение магнитной постоянной μ_0. ***Ответ***: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

1.154. Определите силу Лоренца $F_Л$, действующую на протон, влетевший со скоростью $v = 1$ Мм/с в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл под углом $\alpha = 60°$ к линиям индукции. ***Ответ***: $F_Л = 1{,}39 \cdot 10^{-14}$ Н.

3.155. Протон и электрон влетают в однородное магнитное поле с одинаковой скоростью перпендикулярно линиям магнитной индукции. Определите отношение радиусов кривизны траекторий протона и электрона. ***Ответ***: $R_p/R_e = 1\,830$.

3.156. Протон, ускоренный разностью потенциалов $U = 1$ кВ, влетая в однородное магнитное поле с магнитной индукцией $B = 0{,}1$ Тл, движется по окружности. Определите радиус R этой окружности. ***Ответ***: $R = 4{,}57$ см.

3.157. Определите угловую скорость ω вращения протона по окружности, которую он описывает в однородном магнитном поле с индукцией $B = 5$ мТл. ***Ответ***: $\omega = 5 \cdot 10^5\ с^{-1}$.

3.158. Заряженная частица с кинетической энергией $E_к = 500$ эВ движется в однородном магнитном поле по окружности радиусом $R = 0{,}5$ м. Определите силу, действующую со стороны поля на частицу. ***Ответ***: $F_Л = 3{,}2 \cdot 10^{-16}$ Н.

3.159. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 1$ кВ, движется в вакууме параллельно прямолинейному длинному проводнику на расстоянии $r = 2{,}5$ см от него. Определите силу F, действующую на электрон, если ток в проводнике $I = 20$ А. ***Ответ***: $F = 4{,}8 \cdot 10^{-16}$ Н.

3.160.* Электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ мТл со скоростью $v = 2$ Мм/с под углом $\alpha = 60°$ к вектору $\vec{B}$. Определите радиус R витка и шаг h спирали, по которой будет двигаться электрон. ***Ответ***: $R = 9{,}86$ см; $h = 35{,}8$ см.

3.161.* Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ мТл по винтовой линии (см. рис. 88). Определите скорость v электрона, если шаг h винтовой линии равен 20 см, а радиус витков $R = 5$ см. ***Ответ***: $v = 1{,}04$ Мм/с.

3.162.* Определите скорость v, с которой должен двигаться перпендикулярно скрещенным под прямым углом однородным электрическому ($E = 150$ кВ/м) и магнитному ($B = 0{,}1$ Тл) полям пучок заряженных частиц, чтобы этот пучок не отклонялся. ***Ответ***: $v = 1{,}5$ Мм/с.

3.163.* Покоящийся в начальный момент протон ускоряется однородным электрическим полем. Через время $t = 0{,}1$ с он влетает в магнитное поле с индукцией $B = 2$ мТл, которое перпендикулярно электрическому. Как и во сколько раз отличаются в этот момент нормальная a_n и тангенциальная a_τ составляющие ускорения? ***Ответ***: в 1 920 раз.

3.164. Определите магнитный момент p_m кольца диаметром $d = 25$ см при силе тока в нем $I = 15$ А. ***Ответ***: $p_m = 736$ мА·м².

3.165. Определите радиус R плоской катушки, имеющей $N = 50$ витков, если при силе тока $I = 1$ А магнитный момент катушки $p_m = 0{,}628$ А·м². ***Ответ***: $R = 6{,}3$ см.

3.166. В однородное магнитное поле с магнитной индукцией $B = 10$ мкТл помещена квадратная рамка со стороной $a = 15$ см. Определите магнитный поток Ф, пронизывающий рамку, если нормаль к плоскости рамки составляет с направлением магнитного поля угол $\alpha = 30^\circ$. ***Ответ***: Ф = 195 нВб.

3.167. Магнитный момент p_m соленоида без сердечника длиной $l = 50$ см равен 0,4 А·м². Определите поток Ф магнитной индукции через площадь поперечного сечения этого соленоида. ***Ответ***: Ф = 1 мкВб.

3.168. Соленоид без сердечника содержит $N = 300$ витков и имеет длину $l = 50$ см. Определите полный магнитный поток Ф, пронизывающий соленоид, если площадь поперечного сечения соленоида $S = 20$ см² и сила тока $I = 2$ А. ***Ответ***: Ф = 905 мкВб.

3.169.* Электрон, влетая в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1$ мТл, движется по окружности. Определите радиус R этой окружности, если магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока равен 12 пА·м². ***Ответ***: $R = 92{,}4$ см.

3.170. Прямоугольная рамка со сторонами $a = 10$ см и $b = 15$ см, содержащая $N = 50$ витков, помещена во внешнее однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл. Нормаль к рамке составляет с направлением магнитного поля угол $\alpha = \pi/6$. Определите вращающий момент M сил, действующих на рамку, если по ней течет ток $I = 2$ А. ***Ответ***: $M = 75$ мН·м.

3.171. Прямоугольная рамка со сторонами $a = 10$ см и $b = 15$ см, содержащая $N = 100$ витков, помещена во внешнее однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл. Определите максимальный вращающий момент M_{max}, действующий на рамку в этом поле, если сила тока в рамке $I = 1$ А. ***Ответ***: $M_{max} = 0{,}3$ Н·м.

3.172.* На квадратную рамку со стороной $a = 15$ см, находящуюся в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,2$ Тл, нормаль к которой составляет с линиями магнитной индукции угол $\alpha = 45^\circ$, действует вращающий момент $M = 2,25$ мН·м. Определите плотность тока j в рамке, если площадь сечения проводника $S_{пр}$, из которого изготовлена рамка, равна 3 мм^2. ***Ответ***: $j = 2,36$ А/мм^2.

3.173. Определите работу A перемещения проводника с током $I = 2$ А в магнитном поле, если магнитный поток $\Delta\Phi$, пересеченный движущимся проводником, составляет 0,01 Вб. ***Ответ***: $A = 20$ мДж.

3.174. Определите работу A, которую надо совершить при перемещении проводника длиной $l = 0,2$ м с током $I = 5$ А на расстояние $a = 10$ см, если индукция B однородного магнитного поля равна 0,1 Тл. Проводник движется перпендикулярно линиям магнитной индукции. ***Ответ***: $A = 10$ мДж.

3.175. В однородном магнитном поле перпендикулярно линиям магнитной индукции расположен прямой проводник длиной $l = 40$ см, по которому течет ток $I = 2$ А. Определите индукцию B магнитного поля, если работа A сил поля по перемещению проводника на расстояние $a = 5$ см равна 0,1 мДж. ***Ответ***: $B = 2,5$ мТл.

Глава 14

Электромагнитная индукция

Основные законы и формулы

■ Закон электромагнитной индукции (закон Фарадея)

$$\mathscr{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

[$\mathscr{E}_i$ — ЭДС электромагнитной индукции].

■ ЭДС индукции в движущемся проводнике

$$\mathscr{E}_i = Blv\sin\alpha$$

[B — магнитная индукция однородного магнитного поля; l — длина проводника; v — скорость движения проводника; α — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$].

■ ЭДС индукции, возникающая в рамке площадью S при вращении рамки с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B,

$$\mathscr{E}_i = BS\omega\sin\omega t$$

[ωt — мгновенное значение угла между вектором $\vec{B}$ и вектором нормали $\vec{n}$ к плоскости рамки].

■ Магнитный поток, создаваемый током I в контуре,

$$\Phi = LI$$

[L — индуктивность контура].

■ Закон Фарадея применительно к самоиндукции

$$\mathscr{E}_s = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

[L — индуктивность контура].

■ Коэффициент трансформации

$$k = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1} = \frac{I_1}{I_2}$$

[N, $\mathscr{E}$, I — число витков, ЭДС и сила тока в обмотках трансформатора соответственно].

■ Энергия магнитного поля, создаваемого током в замкнутом контуре индуктивностью L, по которому течет ток I,

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

■ Объемная плотность энергии однородного магнитного поля длинного соленоида

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}$$

[W — энергия однородного магнитного поля; V — объем соленоида; B — магнитная индукция; μ_0 — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость среды].

Примеры решения задач

1 Определите скорость изменения магнитного потока $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ сквозь контур, содержащий $N = 20$ витков и имеющий сопротивление $R = 0{,}1$ Ом, если в нем возбуждается индукционный ток $I_i = 0{,}2$А.

Дано: $N = 20$; $R = 0{,}1$ Ом; $I_i = 0{,}2$ А.

Найти: $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

Решение. Согласно закону электромагнитной индукции (закону Фарадея),

$$\mathscr{E}_i = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Модуль ЭДС электромагнитной индукции

$$|\mathscr{E}_i| = N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \qquad (1)$$

По закону Ома

$$|\mathscr{E}_i| = I_i R, \qquad (2)$$

где I_i — сила индукционного тока; R — сопротивление контура.

Приравняв выражение (1) и (2),

$$I_i R = N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

получим искомую скорость изменения магнитного потока сквозь контур

$$\boxed{\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{I_i R}{N}}$$

$$\left[\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right] = \text{А}\cdot\text{Ом} = \text{А}\cdot\frac{\text{В}}{\text{А}} = \text{В} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{с}} = \frac{\text{Вб}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 1\,\text{мВб/с}.$

2* Прямолинейный проводник длиной $l = 0{,}4$ м гибкими проводами подсоединен к источнику с ЭДС $\mathscr{E}_1 = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}1$ Ом и помещен в однородное магнитное поле с магнитной индукцией $B = 0{,}2$ Тл, направленное перпендикулярно чертежу к нам. Сопротивление внешней цепи $R = 2{,}1$ Ом (рис. 91). Определите силу тока I в проводнике, когда он движется перпендикулярно линиям магнитной индукции со скоростью $v = 4$ м/с.

Дано: $l = 0{,}4$ м; $\mathscr{E}_1 = 12$ В; $r = 0{,}1$ Ом; $B = 0{,}2$ Тл; $R = 2{,}1$ Ом; $v = 4$ м/с.

Найти: I.

Решение. Сила тока, согласно закону Ома для замкнутой цепи,

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r}, \tag{1}$$

где $\mathscr{E}$ — ЭДС, действующая в электрической цепи; R — сопротивление внешней цепи; r — внутреннее сопротивление источника тока.

ЭДС, действующая в цепи,

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_i, \tag{2}$$

где $\mathscr{E}_i$ — ЭДС индукции проводника длиной l, движущегося со скоростью v в однородном магнитном поле,

$$\mathscr{E}_i = vBl \tag{3}$$

(учли, что проводник движется перпендикулярно линиям магнитной индукции). ЭДС индукции $\mathscr{E}_i$ направлена противоположно $\mathscr{E}_1$, что и отвечает знаку «минус» в формуле (2).

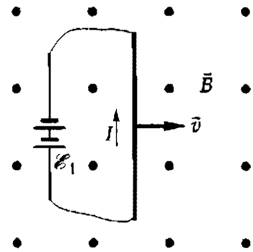


Рис. 91

Учитывая формулу (2), выражение (1) можно записать в виде

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_i}{R + r}. \tag{4}$$

Подставив выражение (3) в формулу (4), найдем искомую силу тока

$$\boxed{I = \frac{\mathscr{E}_1 - vBl}{R + r}}$$

$$[I] = \frac{\text{В} - \text{м}/(\text{с}) \cdot \text{Тл} \cdot \text{м}}{\text{Ом}} = \frac{\text{В} - \text{м}^2/(\text{с}) \cdot \text{Н}/(\text{А} \cdot \text{м})}{\text{Ом}} = \frac{\text{В} - \text{Дж}/(\text{А} \cdot \text{с})}{\text{Ом}} =$$

$$= \frac{\text{В} - \text{Вт}/\text{А}}{\text{Ом}} = \frac{\text{В} - \text{В} \cdot \text{А}/\text{А}}{\text{Ом}} = \frac{\text{В}}{\text{Ом}} = \text{А}.$$

Ответ: $I = 4$ А.

3* В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл равномерно вращается катушка, содержащая $N = 500$ витков, с частотой $n = 5$ с$^{-1}$. Площадь S поперечного сечения катушки 50 см^2. Ось вращения перпендикулярна оси катушки и направлению магнитного поля. Определите максимальную ЭДС индукции $(\mathscr{E}_\text{i})_{\max}$ вращающейся катушки.

Дано: $B = 0{,}1$ Тл; $N = 500$; $n = 5$ с$^{-1}$; $S = 50$ см^2 $= 5 \cdot 10^{-3}$ м^2.

Найти: $(\mathscr{E}_i)_{\max}$.

Решение. Согласно закону Фарадея,

$$\mathscr{E}_i = \frac{\Delta\Phi}{-\Delta t}, \qquad (1)$$

где N — число витков, пронизываемых магнитным потоком Ф. При произвольном расположении катушки относительно магнитного поля полный магнитный поток

$$\Phi = NBS\cos\omega t, \qquad (2)$$

где $\omega = 2\pi n$. Подставив ω в (2), получим

$$\Phi = NBS\cos 2\pi nt.$$

Тогда

$$\mathscr{E}_i = -NBS \cdot 2\pi n(-\sin 2\pi nt) = 2\pi nNBS\sin 2\pi nt,$$

$$\mathscr{E}_i = (\mathscr{E}_i)_{\max} \text{ при } \sin 2\pi nt = 1,$$

поэтому искомая максимальная ЭДС индукции вращающейся катушки

$$\boxed{(\mathscr{E}_i)_{\max} = 2\pi nNBS}$$

$$[(\mathscr{E}_i)_{\max}] = \text{с}^{-1} \cdot \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \text{Вб} \cdot \text{с}^{-1} = \text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{с}^{-1} = \text{В}.$$

Ответ: $(\mathscr{E}_i)_{\max} = 7{,}86$ В.

4 Определите индуктивность L соленоида без сердечника с числом витков $N = 200$, площадью поперечного сечения $S = 30$ см^2 и длиной $l = 20$ см.

Дано: $N = 200$; $S = 30$ см^2 $= 3 \cdot 10^{-3}$ м^2; $l = 20$ см $= 0{,}2$ м.

Найти: L.

Решение. Магнитный поток, создаваемый током I, в соленоиде

$$\Phi = LI,$$

где L — индуктивность соленоида.

В этом случае

$$L = \frac{\Phi}{I}. \qquad (1)$$

Полный магнитный поток сквозь соленоид

$$\Phi = NBS, \qquad (2)$$

где N — число витков соленоида; S — площадь его поперечного сечения;

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l} \qquad (3)$$

— индукция магнитного поля внутри соленоида (учли, что соленоид без сердечника).

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1), найдем искомую индуктивность соленоида

$$\boxed{L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}}$$

$$[L] = \frac{\text{Гн/(м)} \cdot \text{м}^2}{\text{м}} = \text{Гн}.$$

Ответ: $L = 0{,}754$ мкГн.

5 При скорости изменения силы тока $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ в соленоиде, равной $= 20$ А/с, на концах соленоида возникает ЭДС самоиндукции $\mathscr{E}_s = 10$ мВ. Определите индуктивность соленоида.

Дано: $\frac{\Delta I}{\Delta t} = 20$ А/с; $\mathscr{E}_s = 10$ мВ $= 10^{-2}$ В.

Найти: L.

Решение. ЭДС самоиндукции, возникающая на концах соленоида, согласно закону Фарадея,

$$\mathscr{E}_s = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Тогда искомая индуктивность соленоида

$$\boxed{L = \frac{\mathscr{E}_s}{\Delta I/\Delta t}}$$

(направление ЭДС несущественно, поэтому знак «минус» опущен).

$$[L] = \frac{\text{В}}{\text{А/с}} = \frac{\text{Вб}}{\text{А}} = \text{Гн}.$$

Ответ: $L = 0{,}5$ мГн.

6 Катушка без сердечника длиной $l = 75$ см содержит $N = 300$ витков. По катушке течет ток $I = 2$ А. Определите объемную плотность энергии w магнитного поля внутри катушки.

Дано: $\mu = 1$; $l = 75$ см $= 0{,}75$ м; $N = 300$; $I = 2$ А.

Найти: w.

Решение. Объемная плотность энергии магнитного поля

$$w = \frac{W}{V}, \tag{1}$$

где энергия магнитного поля

$$W = \frac{LI^2}{2}; \tag{2}$$

объем катушки

$$V = lS \tag{3}$$

(L — индуктивность катушки).

Индуктивность катушки (см. задачу 4)

$$L = \mu_0\mu\frac{N^2S}{l}. \tag{4}$$

Подставив выражения (2)—(4) в формулу (1), найдем искомую объемную плотность энергии магнитного поля внутри катушки

$$\boxed{w = \frac{\mu_0\mu N^2 I^2}{2l^2}}$$

$$[w] = \frac{\text{Гн/(м)}\cdot\text{А}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{Вб/(А)}\cdot\text{А}^2}{\text{м}^3} = \frac{\text{Вб}\cdot\text{А}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2\cdot\text{А}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Тл}\cdot\text{А}}{\text{м}} =$$
$$= \frac{\text{Н/(А}\cdot\text{м)}\cdot\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Дж/м}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $w = 0{,}402$ Дж/м^3.

7 Соленоид без сердечника с однослойной обмоткой из проволоки диаметром $d = 0{,}3$ мм имеет длину $l = 0{,}6$ м и поперечное сечение $S = 50$ см^2. За какое время t при напряжении $U = 12$ В и силе тока $I = 2$ А в обмотке выделяется количество теплоты, равное энергии поля внутри соленоида? Поле считать однородным.

Дано: $\mu = 1$; $d = 0{,}3$ мм $= 3\cdot10^{-4}$ м; $l = 0{,}6$ м; $S = 50$ см^2 = $= 5\cdot10^{-2}$ м^2; $I = 2$ А; $U = 12$ В; $Q = W$.

Найти: t.

Решение. При прохождении тока I при напряжении U в обмотке за время t выделяется теплота

$$Q = IUt. \qquad (1)$$

Энергия поля внутри соленоида

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}V, \qquad (2)$$

где магнитная индукция внутри соленоида

$$B = \mu_0\mu\frac{NI}{l},$$

где N — общее число витков соленоида.

Если витки вплотную прилегают друг к другу, то

$$l = Nd,$$

где d — диаметр проволоки. Отсюда

$$N = \frac{l}{d}.$$

Подставив выражения для B и N в формулу (2), получим

$$W = \frac{\mu_0\mu}{2}\frac{I^2lS}{d^2}. \qquad (3)$$

Согласно условию задачи, $Q = W$. Тогда, приравняв правые части формул (1) и (3), имеем

$$IUt = \frac{\mu_0\mu I^2lS}{2d^2},$$

откуда искомое время

$$\boxed{t = \frac{\mu_0\mu ISl}{2Ud^2}}$$

$$[t] = \frac{\text{Гн/(м)}\cdot\text{А}\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}}{\text{В}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}}{\text{В}} = \frac{\text{Вб}}{\text{В}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{В}} = \text{с}.$$

Ответ: $t = 34{,}9$ мс.

Задачи для самостоятельного решения

3.176. Определите размерность $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. ***Ответ***: В.

3.177. Проводящий контур в виде витка радиусом $R = 2$ см расположен перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. Определите ЭДС электромагнитной индукции $\mathscr{E}_i$, возникающую в витке, если за время $\Delta t = 0{,}15$ с магнитная индукция равномерно возрастает от $B_1 = 0{,}1$ Тл до $B_2 = 0{,}55$ Тл. ***Ответ***: $\mathscr{E}_i = 3{,}77$ мВ.

3.178. Проводящий контур в виде витка обладает электрическим сопротивлением $R = 1$ Ом. Определите заряд ΔQ, прошедший через поперечное сечение проводника, если магнитный поток сквозь виток равномерно увеличился от $\Phi_1 = 20$ мкВб до $\Phi_2 = 50$ мкВб. ***Ответ***: $\Delta Q = 30$ мкКл.

3.179. В однородном магнитном поле находится плоский виток ($S = 2$ см^2), расположенный перпендикулярно линиям магнитной индукции. Сопротивление витка $R = 2$ Ом. Определите силу тока I через виток, если скорость изменения магнитной индукции $\frac{\Delta B}{\Delta t} = 0{,}2$ Тл/с. ***Ответ***: $I = 20$ мкА.

3.180.* В однородном магнитном поле находится медное кольцо ($\rho = 17$ нОм·м) диаметром $D = 25$ см и толщиной $d = 2{,}5$ мм, расположенное перпендикулярно линиям магнитной индукции. Определите, какова должна быть скорость изменения магнитной индукции во времени $\Delta B/\Delta t$, чтобы индукционный ток в кольце I был равен 5 А. ***Ответ***: $\frac{\Delta B}{\Delta t} = 0{,}277$ Тл/с.

3.181. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл находится прямоугольная рамка с подвижной стороной, длина которой $l = 20$ см. Определите ЭДС $\mathscr{E}_i$ индукции, возникающей в рамке, если ее подвижная сторона перемещается перпендикулярно линиям магнитной индукции со скоростью $v = 5$ м/с. ***Ответ***: $\mathscr{E}_i = 0{,}1$ В.

3.182. Определите угол α, под которым следует передвигать проводник длиной $l = 40$ см со скоростью $v = 5$ м/с к линиям магнитной индукции, если магнитная индукция однородного магнитного поля $B = 0{,}5$ Тл, а на концах проводника возникает ЭДС электромагнитной индукции $\mathscr{E}_i = 0{,}5$ В. ***Ответ***: $\alpha = 30°$.

3.183.* Прямолинейный проводник длиной $l = 0{,}4$ м гибкими проводами подсоединен к источнику ЭДС $\mathscr{E}_i = 6$ В и находится в однородном магнитном поле ($B = 0{,}1$ Тл), направленном перпендикулярно чертежу к нам. Сила тока I в проводнике, когда он движется перпендикулярно линиям магнитной индукции со скоростью $v = 5$ м/с, равна 2 А. Определите внутреннее сопротивление r источника ЭДС, если сопротивление внешней цепи $R = 2,7$ Ом. ***Ответ***: $r = 0,2$ Ом.

3.184.* В однородном магнитном поле ($B = 0,2$ Тл) в плоскости, перпендикулярной линиям магнитной индукции, равномерно с частотой $n = 6$ с$^{-1}$ вращается проволочное кольцо площадью $S = 100$ см^2. Определите мгновенное значение ЭДС электромагнитной индукции $\mathscr{E}_i$ в момент времени, когда нормаль к кольцу составляет с вектором $\vec{B}$ угол $\alpha = 60°$. ***Ответ***: $\mathscr{E}_i = 0,065$ В.

3.185.* В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл в плоскости, перпендикулярной линиям магнитной индукции, равномерно вращается рамка, которая содержит $N = 100$ витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь рамки $S = 200$ см^2. Определите частоту n вращения рамки, если максимальная ЭДС, индуцируемая в ней, $(\mathscr{E}_i)_{max} = 6,28$ В. ***Ответ***: $n = 5$ с$^{-1}$.

3.186.* В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл с частотой $n = 300$ мин$^{-1}$ равномерно вращается прямоугольная рамка. Площадь рамки $S = 100$ см^2. Определите число N витков рамки, плотно прилегающих друг к другу, если максимальная ЭДС, индуцируемая в рамке, $(\mathscr{E}_i)_{max} = 6,28$ В. ***Ответ***: $N = 200$.

3.187.* Проволочное кольцо равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл в плоскости, перпендикулярной линиям магнитной индукции, с частотой $n = 300$ мин$^{-1}$. Определите радиус r кольца, если максимальная ЭДС $(\mathscr{E}_i)_{max}$, индуцируемая в кольце, составляет 0,395 В. ***Ответ***: $r = 20$ см.

3.188.* В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл равномерно с частотой $n = 300$ мин$^{-1}$ в плоскости, перпендикулярной линиям магнитной индукции, вращается рамка площадью $S = 100$ см^2, содержащая $N = 100$ витков, которые плотно прилегают друг к другу. Сопротивление рамки $R = 1,57$ Ом. Определите максимальную силу тока I_{max}, возникающего в рамке. ***Ответ***: $I_{max} = 2$ А.

3.189. Определите индуктивность L катушки, в которой при токе $I = 2$ А полный магнитный поток Φ сквозь катушку равен 0,02 Вб. ***Ответ***: $L = 10$ мГн.

3.190. Длинный соленоид индуктивностью $L = 2$ мГн содержит $N = 1\,000$ витков. Площадь поперечного сечения $S = 25$ см^2. Определите магнитную индукцию B поля внутри соленоида, если сила тока I, протекающего по его обмотке, равна 5 А. ***Ответ***: $B = 4$ мТл.

3.191. Длинный соленоид индуктивностью $L = 1$ мГн содержит $N = 500$ витков. Площадь поперечного сечения соленоида $S = 20$ см^2. Определите силу тока I в соленоиде, если индукция магнитного поля внутри соленоида $B = 1$ мТл. ***Ответ***: $I = 1$ А.

3.192. Определите индуктивность L соленоида без сердечника с числом витков $N = 500$, диаметром $d = 2{,}5$ см и длиной $l = 25$ см. ***Ответ***: $L = 617$ мкГн.

3.193. Соленоид площадью поперечного сечения $S = 15$ см^2 и длиной $l = 40$ см обладает индуктивностью $L = 0{,}8$ мГн. Определите число N витков соленоида. ***Ответ***: $N = 412$.

3.194. В соленоиде с индуктивностью $L = 0{,}1$ мГн течет ток $I = 2$ А. Определите среднее значение ЭДС самоиндукции $\mathscr{E}_s$, возникающей в соленоиде, если за время $\Delta t = 250$ мкс ток при выключении уменьшается до нуля. ***Ответ***: $\langle \mathscr{E}_s \rangle = 0{,}8$ В.

3.195. Определите индуктивность L соленоида, если при равномерном изменении силы тока от $I_1 = 3$ А до $I_2 = 5$ А за время $\Delta t = 0{,}03$ с в соленоиде возникает ЭДС самоиндукции $\mathscr{E}_s = 60$ В. ***Ответ***: $L = 0{,}6$ Гн.

3.196. Определите время Δt, за которое в катушке индуктивностью $L = 0{,}2$ Гн произойдет нарастание тока от нуля до 10 А, если при этом возникает средняя ЭДС самоиндукции $\mathscr{E}_s = 20$ В. ***Ответ***: $\Delta t = 0{,}1$ с.

3.197. В катушке индуктивностью $L = 0{,}4$ Гн возникает средняя ЭДС самоиндукции $\mathscr{E}_s = 10$ В. Определите среднюю скорость нарастания тока $\Delta I/\Delta t$ в катушке. ***Ответ***: $\dfrac{\Delta I}{\Delta t} = 25$ А/с.

3.198. В соленоиде без сердечника, содержащем $N = 500$ витков, при увеличении силы тока за время $\Delta t = 2$ с магнитный поток $\Delta\Phi$ увеличился на 2 мВб. Определите среднюю ЭДС самоиндукции $|\mathscr{E}_s|$, возникающую в соленоиде. ***Ответ***: $|\langle \mathscr{E}_s \rangle| = 0{,}5$ В.

3.199. Повышающий трансформатор работает от сети с напряжением $U_1 = 220$ В. Определите коэффициент трансформации k, если напряжение U_2 на зажимах вторичной обмотки при холостом ходе трансформатора составляет 880 В. ***Ответ***: $k = 0{,}25$.

3.200. Трансформатор с коэффициентом трансформации $k = 0{,}12$ понижает напряжение с 220 В до 12 В. Сопротивление вторичной обмотки трансформатора $R_2 = 4$ Ом. Пренебрегая потерями энергии в первичной обмотке, определите силу тока I_2 во вторичной обмотке. ***Ответ***: $I_2 = 3{,}6$ А.

3.201. Автотрансформатор, понижающий напряжение с $U_1 = 5$ кВ до $U_2 = 110$ В, содержит в первичной обмотке $N_1 = 3\,000$ витков. Сопротивление вторичной обмотки $R_2 = 0{,}5$ Ом, а сопротивление внешней цепи (в сети пониженного напряжения) $R = 10$ Ом. Пренебрегая сопротивлением первичной обмотки, определите число витков N_2 во вторичной обмотке трансформатора. ***Ответ***: $N_2 = 69$.

3.202. Определите коэффициент полезного действия η трансформатора, если сила тока в его первичной обмотке $I_1 = 1$ А, напряжение на ее концах $U_1 = 220$ В, во вторичной обмотке соответственно $I_2 = 10$ А, $U_2 = 16$ В. ***Ответ***: $\eta = 0{,}727$.

3.203. По обмотке соленоида индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн течет ток $I = 5$ А. Определите энергию W магнитного поля соленоида. ***Ответ***: $W = 1{,}25$ Дж.

3.204. Определите энергию W магнитного поля соленоида, содержащего $N = 1\,000$ витков, если сила тока I в обмотке соленоида равна 2 А, а магнитный поток сквозь его поперечное сечение $\Phi_1 = 100$ мкВб. ***Ответ***: $W = 0{,}1$ Дж.

3.205. Определите силу постоянного тока I через обмотку соленоида, если энергия магнитного поля соленоида $W = 0{,}4$ Дж, а полный магнитный поток, пронизывающий соленоид, $\Phi = 0{,}2$ Вб. ***Ответ***: $I = 4$ А.

3.206. В обмотке соленоида, находящегося под постоянным напряжением, за время $t = 0{,}01$ с выделяется количество теплоты, равное энергии магнитного поля в сердечнике. Определите сопротивление R обмотки, если индуктивность соленоида $L = 0{,}2$ Гн. ***Ответ***: $R = 10$ Ом.

3.207. Соленоид без сердечника длиной $l = 0{,}6$ м и площадью поперечного сечения $S = 10$ см^2 содержит $N = 600$ витков. Определите энергию W магнитного поля внутри соленоида, если по обмотке соленоида течет ток $I = 5$ А. ***Ответ***: $W = 9{,}42$ мДж.

3.208. Определите энергию W магнитного поля соленоида, в котором при плотности постоянного тока $j = 50$ А/м^2 полный магнитный поток $\Phi = 0{,}01$ Вб. Радиус проводника обмотки соленоида $r = 0{,}6$ мм. ***Ответ***: $W = 0{,}283$ мкДж.

3.209. Соленоид длиной $l = 0{,}5$ м и площадью поперечного сечения $S = 2$ см^2 имеет индуктивность $L = 0{,}1$ мГн. Определите объемную плотность w энергии магнитного поля внутри соленоида, если сила тока в обмотке этого соленоида $I = 2$ А. ***Ответ***: $w = 2$ Дж/м^3.

3.210. Индуктивность L соленоида длиной $l = 0{,}5$ м и площадью поперечного сечения $S = 5$ см^2 равна 0,2 мкГн. Определите силу тока I в обмотке соленоида, при которой объемная плотность энергии w магнитного поля внутри соленоида будет равна 0,1 мДж/м^3. ***Ответ***: $I = 0{,}5$ А.

3.211.* Соленоид без сердечника с однослойной обмоткой из проволоки радиусом $r = 0{,}1$ мм имеет длину $l = 60$ см и поперечное сечение $S = 30$ см^2. Определите, при каком напряжении U в обмотке за время $t = 30$ мс выделится количество теплоты Q, равное энергии W магнитного поля внутри соленоида, если по обмотке течет ток $I = 1{,}5$ А. ***Ответ***: $U = 1{,}41$ В.

Глава 15

Электромагнитные колебания и волны

Основные законы и формулы

■ Собственная частота колебательного контура

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

[L — индуктивность катушки; C — электроемкость конденсатора].

■* Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний заряда в контуре и его решение

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0, \quad Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

[Q_m — амплитуда колебаний заряда конденсатора; ω_0 — собственная частота контура].

■ Формула Томсона, устанавливающая связь между периодом T собственных колебаний в контуре без активного сопротивления, индуктивностью L и электроемкостью контура C,

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

■* Сила тока в колебательном контуре и напряжение на конденсаторе в случае гармонических электромагнитных колебаний

$$I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{Q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

[$I_m = \omega_0 Q_m$ — амплитуда силы тока; $U_m = Q_m/C$ — амплитуда напряжения; ω_0 — собственная частота контура].

■ Реактивное индуктивное сопротивление (индуктивное сопротивление)

$$R_L = \omega L$$

[ω — частота переменного напряжения, подаваемого на концы цепи; L — индуктивность].

■ Реактивное емкостное сопротивление (емкостное сопротивление)

$$R_C = \frac{1}{\omega C}$$

[ω — частота переменного напряжения, подаваемого на концы цепи; C — электроемкость].

■ Полное сопротивление цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные резистор сопротивлением R, катушку индуктивностью L и конденсатор электроемкостью C,

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/(\omega C)\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(R_L - R_C\right)^2}$$

[$R_L = \omega L$ — реактивное индуктивное сопротивление; $R_C = 1/(\omega C)$ — реактивное емкостное сопротивление].

■ Реактивное сопротивление

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

[$R_L = \omega L$ — реактивное индуктивное сопротивление; $R_C = \frac{1}{\omega C}$ — реактивное емкостное сопротивление].

■ Сдвиг по фазе между напряжением и силой тока

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}.$$

■ Резонансная частота и резонансная амплитуда силы тока в случае резонанса в цепи переменного тока

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \left(I_m\right)_{\text{рез}} = \frac{U_m}{R}$$

[ω_0 — собственная частота контура; R, L и C — активное сопротивление, индуктивность и электроемкость колебательного контура; U_m — амплитудное значение внешнего приложенного напряжения].

■ Средняя мощность, выделяемая в цепи переменного тока,

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos\varphi; \quad \langle P\rangle = \frac{1}{2} R I_m^2$$

[I_m и U_m — амплитудные значения силы тока и напряжения].

■ Действующие (эффективные) значения силы тока и напряжения:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

[I_m и U_m — амплитудные значения силы тока и напряжения].

■ Коэффициент мощности

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/(\omega C)\right)^2}}$$

[R — активное сопротивление цепи; ωL — реактивное индуктивное сопротивление; $1/(\omega C)$ — реактивное емкостное сопротивление].

■ Связь между длиной волны λ, периодом T колебаний и частотой ν

$$\lambda = vT; \quad v = \lambda\nu.$$

■ Скорость распространения электромагнитных волн в среде

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

[$c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ — скорость распространения света в вакууме; ε_0 и μ_0 соответственно электрическая и магнитная постоянные; ε и μ соответственно электрическая и магнитная проницаемость среды].

■ Связь между амплитудными значениями индукции магнитного поля B_m и напряженности электрического поля E_m электромагнитной волны в вакууме

$$B_m = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}E_m = \frac{E_m}{c}$$

[ε_0 и μ_0 — соответственно электрическая и магнитная постоянные; c — скорость распространения света в вакууме].

■ Поверхностная плотность потока электромагнитного излучения

$$I = \frac{\Delta W}{S\Delta t} = \langle w\rangle c$$

[ΔW — средняя энергия, переносимая электромагнитной волной; S — площадь поверхности, перпендикулярная направлению распространения волны; Δt — время переноса энергии; $\langle w\rangle$ — средняя объемная плотность энергии электромагнитного поля; c — скорость распространения света в вакууме].

Примеры решения задач

1* Электрический заряд на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону $Q = 10^{-5}\cos(3\pi t + \pi/6)$, Кл. Определите амплитуду колебаний заряда Q_m на обкладках конденсатора, циклическую частоту ω_0, частоту ν_0, период T и начальную фазу φ колебаний заряда, а также амплитуду I_m силы тока в контуре.

Дано: $Q = 10^{-5}\cos(3\pi t + \pi/6)$, Кл.

Найти: Q_m; ω_0; ν_0; T; φ; I_m.

Решение. Из заданного в условии задачи закона изменения электрического заряда на обкладках конденсатора

$$Q = 10^{-5}\cos(3\pi t + \pi/6),\ \text{Кл},$$

следует, что:

- амплитуда колебаний заряда на обкладках конденсатора

$$Q_m = 10^{-5}\ \text{А};$$

- циклическая частота $\omega_0 = 3\pi$ с$^{-1}$;
- начальная фаза колебаний заряда $\varphi = \pi/6$ рад.

Искомые частота и период колебаний соответственно равны

$$\boxed{\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}} \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

Силу тока в колебательном контуре найдем, продифференцировав по времени уравнение гармонических колебаний заряда

$$Q = Q_m\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Имеем

$$I = \dot{Q} = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = \omega_0 Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2),$$

откуда искомая амплитуда силы тока в контуре

$$\boxed{I_m = \omega_0 Q_m}$$

Ответ: $Q_m = 10^{-5}$ А; $\omega_0 = 3\pi$ с$^{-1}$; $\nu_0 = 1{,}5$ Гц; $T = 0{,}667$ с; $\varphi = \pi/6$ рад; $I_m = 94{,}2$ мкА.

2 Сила тока в идеальном колебательном контуре, содержащем катушку индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн и конденсатор, изменяется со временем согласно уравнению $I = -0{,}4\sin 400\pi t$, А. Определите период T колебаний, электроемкость C конденсатора, максимальное напряжение U_m на обкладках конденсатора, максимальную энергию магнитного поля $W^{\text{м}}_{max}$ и максимальную энергию электрического поля $W^{\text{эл}}_{max}$.

Дано: $L = 0{,}1$ Гн; $I = -0{,}4\sin 400\pi t$, А; $R = 0$.

Найти: T; C; U_m; $W^{\text{м}}_{max}$; $W^{\text{эл}}_{max}$.

Решение. Согласно условию задачи, сила тока в колебательном контуре

$$I = -0{,}4\sin 400\pi t,\ \text{А},$$

тогда амплитуда силы тока $I_m = 0{,}4$ А; циклическая частота $\omega_0 = 400\pi$ с$^{-1}$.

Период колебаний

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

Электроемкость конденсатора найдем из формулы Томсона, определяющей период колебаний в электрическом контуре,

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

откуда

$$\boxed{C = \frac{T^2}{4\pi^2 L}}$$

Максимальное значение напряжения на обкладках конденсатора

$$U_m = \frac{Q_m}{C}, \qquad (1)$$

где Q_m — амплитуда колебаний заряда конденсатора.

Заряд Q совершает гармонические колебания (при $R \approx 0$) по закону

$$Q = Q_m \cos\omega_0 t$$

(начальную фазу приняли равной нулю). Тогда сила тока в колебательном контуре

$$I = \dot{Q} = -\omega_0 Q_m \sin\omega_0 t = -I_m \sin\omega_0 t,$$

где амплитуда колебаний силы тока

$$I_m = \omega_0 Q_m,$$

откуда

$$Q_m = \frac{I_m}{\omega_0}. \qquad (2)$$

Подставив формулу (2) в выражение (1), найдем искомое максимальное напряжение на обкладках конденсатора

$$\boxed{U_m = \frac{I_m}{\omega_0 C}}.$$

В случае незатухающих колебаний полная энергия контура, равная сумме энергий электрического поля конденсатора $CU^2/2$ и магнитного поля катушки $LI^2/2$, остается постоянной. Следовательно,

$$\frac{CU_m^2}{2}=\frac{LI_m^2}{2},$$

т. е. максимальные энергии электрического и магнитного полей равны.

Таким образом, искомые максимальные значения

$$\boxed{W_{max}^{эл}=W_{max}^{м}=\frac{LI_m^2}{2}=\frac{CU_m^2}{2}}$$

$$[T]=\frac{1}{с^{-1}}=с;$$

$$[C]=\frac{с^2}{Гн}=\frac{с^2}{Вб/А}=\frac{А\cdot с^2}{В\cdot с}=\frac{А\cdot с}{В}=\frac{Кл}{В}=Ф;$$

$$[U_m]=\frac{А}{с^{-1}\cdot Ф}=\frac{А\cdot с}{Ф}=\frac{Кл}{Кл/В}=В;$$

$$\left[W_{max}^{эл}\right]=Ф\cdot В^2=\frac{Кл}{В}\cdot В^2=Кл\cdot В=Дж;$$

$$\left[W_{max}^{м}\right]=Гн\cdot А^2=\frac{Вб}{А}\cdot А^2=Вб\cdot А=В\cdot с\cdot А=Дж.$$

Ответ: T = 5 мс; C = 6,33 мкФ; U_m = 50,3 В; $W_{max}^{эл}=W_{max}^{м}=$ = 8 мДж.

3 Цепь переменного тока состоит из последовательно включенных катушки индуктивностью L, конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R (рис. 92, *а*). Определите амплитудное значение U_{LC_m} суммарного напряжения на катушке и конденсаторе, если амплитудное значение напряжения на резисторе U_R = 100 В, а сдвиг фаз φ между током и внешним напряжением составляет 30°.

Дано: U_R = 100 В; φ = 30°.

Найти: U_{LC_m}.

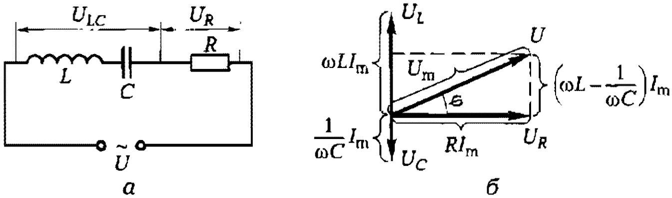


Рис. 92

Решение. В цепи, приведенной на рис. 92, *а*, возникает переменный ток, который вызовет на всех элементах цепи падение напряжения. На рис. 92, *б* показана векторная диаграмма амплитуд падений напряжений на резисторе (U_R), катушке (U_L) и конденсаторе (U_C). Амплитуда U_m приложенного напряжения равна сумме амплитуд этих падений напряжений.

Разность фаз между током и внешним напряжением определим с помощью векторной диаграммы. Имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}. \quad (1)$$

Реактивные (ωL и $\dfrac{1}{\omega C}$) и активное R сопротивления найдем из выражений для амплитуд напряжений на соответствующих элементах цепи. Амплитудные значения напряжения:

- на резисторе

$$U_R = RI_m;$$

- на катушке индуктивности

$$U_L = \omega_0 L I_m;$$

- на конденсаторе

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_m,$$

где I_m — амплитуда силы тока. Из этих выражений находим:

$$R = \frac{U_R}{I_m}; \ \omega L = \frac{U_L}{I_m}; \ \frac{1}{\omega C} = \frac{U_C}{I_m}. \quad (2)$$

Подставив выражения (2) в формулу (1), получаем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R}. \quad (3)$$

Учитывая, что

$$U_{LC} = U_L - U_C$$

(см. рис. 92, *б*), выражение (3) можно записать в виде

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_{LC}}{U_R},$$

откуда искомое амплитудное значение суммарного напряжения

$$\boxed{U_{LC_m} = U_R \operatorname{tg}\varphi}$$

Ответ: $U_{LC_m} = 57{,}7$ В.

4 В цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц и амплитудным значением внешнего напряжения $U_m = 150$ В последовательно включены резистор сопротивлением $R = 50$ Ом, конденсатор и катушка индуктивностью $L = 1$ Гн. Определите электроемкость C конденсатора, если в цепи наблюдается резонанс, и амплитудное значение силы тока при резонансе.

Дано: $\nu = 50$ Гц; $U_m = 150$ В; $R = 50$ Ом; $L = 1$ Гн.

Найти: C; $(I_m)_{рез}$.

Решение. При резонансе в цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные резистор, конденсатор и катушку индуктивности, емкостное реактивное сопротивление равно индуктивному реактивному сопротивлению

$$R_C = R_L,$$

где

$$R_L = \omega L = 2\pi\nu L \quad \text{и} \quad R_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C}.$$

Приравнивая последние выражения, найдем искомую электроемкость, при которой наступает резонанс

$$\boxed{C = \frac{1}{(2\pi\nu)^2 L}}$$

Амплитудное значение силы тока

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

достигнет наибольшего (возможного при данном U_m) значения при наименьшем значении полного сопротивления цепи переменного тока, т.е. при $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$. Тогда искомое амплитудное значение тока при резонансе

$$\boxed{(I_m)_{рез} = \frac{U_m}{R}}$$

$$[C] = \frac{1}{\text{Гц}^2\text{Гн}} = \frac{\text{с}^2}{\text{Вб/А}} = \frac{\text{А}\cdot\text{с}^2}{\text{В}\cdot\text{с}} = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \text{Ф},$$

$$[(I_m)_{рез}] = \frac{\text{В}}{\text{Ом}} = \text{А}.$$

Ответ: $C = 10{,}1$ мкФ; $(I_m)_{рез} = 3$ А.

5 В колебательном контуре, содержащем конденсатор электроемкостью C = 1,2 нФ, катушку индуктивностью L = 6 мкГн и резистор сопротивлением R = 0,2 Ом, поддерживаются незатухающие колебания. Определите амплитудное значение напряжения на конденсаторе U_{C_m}, если средняя мощность $\langle P\rangle$, потребляемая колебательным контуром, составляет 2 мВт.

Дано: C = 1,2 нФ = $1{,}2\cdot10^{-9}$ Ф; L = 6 мкГн = $6\cdot10^{-6}$ Гн; R = = 0,2 Ом; $\langle P\rangle$ = 2 мВт = $2\cdot10^{-3}$ Вт.

Найти: U_{C_m}.

Решение. Средняя мощность, потребляемая контуром,

$$\langle P\rangle = \frac{RI_m^2}{2}, \qquad (1)$$

где амплитуда силы тока

$$I_m = \frac{U_{C_m}}{R_C}, \quad \left(R_C = \frac{1}{\omega C}\right) \Rightarrow \quad I_m = \omega C U_{C_m}.$$

Так как в контуре поддерживаются незатухающие колебания,

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Тогда

$$I_m = \frac{CU_{C_m}}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{C}{L}}U_{C_m}. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), найдем искомое амплитудное значение напряжения на конденсаторе

$$\boxed{U_{C_m} = \sqrt{\frac{2L\langle P\rangle}{RC}}}$$

$$[U_{C_m}] = \sqrt{\frac{\text{Гн}\cdot\text{Вт}}{\text{Ом}\cdot\text{Ф}}} = \sqrt{\frac{\text{Вб/А}\cdot\text{Дж/с}}{\text{Ом}\cdot\text{Ф}}} = \sqrt{\frac{\text{Вб}\cdot\text{Дж/с}}{\text{В}\cdot\text{Ф}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{Дж/с}}{\text{В}\cdot\text{Ф}}} = \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{Ф}}} = \sqrt{\frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{Кл/В}}} = \sqrt{\frac{\text{А}\cdot\text{с}}{\text{Кл}}\cdot\text{В}^2} = \text{В}.$$

Ответ: $U_{C_m} = 10$ В.

6 При переходе электромагнитной волны из немагнитной среды с диэлектрической проницаемостью ε в вакуум длина волны увеличилась на $\Delta\lambda = 48{,}8$ м. Определите частоту ν колебаний.

Дано: $\varepsilon = 2{,}2$; $\Delta\lambda = 48{,}8$ м.

Найти: ν.

Решение. При переходе электромагнитной волны из одной среды в другую частота колебаний не изменяется ($\nu = \text{const}$). Приращение длины волны

$$\Delta\lambda = \lambda_0 = \lambda, \qquad (1)$$

где длина волны в вакууме

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu}, \qquad (2)$$

а длина волны в среде

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu}, \qquad (3)$$

где c и υ — соответственно скорость распространения электромагнитных волн в вакууме и среде.

Скорость распространения электромагнитных волн в среде

$$\upsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad (4)$$

(учли, что среда немагнитная: $\mu = 1$).

Подставив выражение (4) в (3), а затем выражение (3) и (2) в (1), найдем искомую частоту колебаний

$$\boxed{\nu = \frac{c}{\Delta\lambda}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}$$

$$[\nu] = \frac{\text{м/с}}{\text{м}} = \frac{\text{м/с}}{\text{с}^{-1}} = \text{с}^{-1} = \text{Гц}.$$

Ответ: $\nu = 2$ МГц.

Задачи для самостоятельного решения

3.212. Электрический заряд на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по следующему закону: $Q = 0{,}2\cos 200\pi t$, мкКл. Определите амплитуду колебаний заряда Q_m на обкладках конденсатора и частоту ν_0 электромагнитных колебаний в контуре. ***Ответ***: $Q_m = 0{,}2$ мкКл; $\nu_0 = 100$ Гц.

3.213. Определите время t от начала колебаний, за которое заряд на обкладках конденсатора в колебательном контуре будет равен половине амплитудного значения заряда. Частота колебаний в контуре $\nu_0 = 26$ кГц. ***Ответ***: $t = 6{,}41$ мкс.

3.214.* Электрический заряд на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по следующему закону: $Q = 0{,}3\cos(2\pi t + \pi/3)$, мКл. Определите амплитуду колебаний заряда Q_m на обкладках конденсатора, циклическую частоту ω_0, частоту ν_0, период T, начальную фазу φ колебаний заряда и амплитуду I_m силы тока в контуре. ***Ответ***: $Q_m = 0{,}3$ мКл; $\omega_0 = 5\pi$ с$^{-1}$; $\nu_0 = 2{,}5$ Гц; $T = 0{,}2$ с; $\varphi = \pi/3$ рад; $I_m = 1{,}5\pi$ мА.

3.215. Сила тока в колебательном контуре со временем изменяется согласно уравнению $I = 0{,}2\sin 300\pi t$, А. Определите амплитуду силы тока I_m, частоту ν_0 и период T колебаний. ***Ответ***: $I_m = 0{,}2$ А; $\nu_0 = 150$ Гц; $T = 6{,}67$ мкс.

3.216. Определите индуктивность L колебательного контура, если его электроемкость $C = 5$ мкФ, а частота ν свободных электромагнитных колебаний равна 3 мГц. ***Ответ***: $L =$ $= 563$ мкГн.

3.217. Ток в колебательном контуре изменяется со временем по закону $I = 3\cos 600t$, А. Определите индуктивность L контура, если электроемкость C его конденсатора равна 5 мкФ. ***Ответ***: $L = 0{,}556$ Гн.

3.218. Определите период T незатухающих колебаний в контуре, если максимальный заряд Q_m на обкладках конденсатора равен 50 нКл, а максимальная сила тока в контуре $I_m = 2{,}5$ А. ***Ответ***: $T = 1{,}26 \cdot 10^{-7}$ с.

2.219. Пренебрегая сопротивлением колебательного контура, содержащего катушку индуктивностью $L = 0{,}5$ Гн и конденсатор емкость $C = 2$ мкФ, определите максимальное напряжение U_m на обкладках конденсатора, если максимальная сила тока I_m в контуре равна 1 А. ***Ответ***: $U_m = 500$ В.

3.220.* Идеальный колебательный контур содержит конденсатор электроемкостью $C = 10$ мкФ (заряжен до максимального напряжения $U_m = 200$ В) и катушку индуктивностью $L = 1$ мГн. Определите максимальный заряд конденсатора Q_m и максимальный ток в контуре I_m. ***Ответ***: $Q_m = 2$ мКл; $I_m = 20$ А.

3.221.* Конденсатор электроемкостью $C = 5$ нФ зарядили до напряжения $U_m = 100$ В и замкнули на катушку индуктивностью $L = 0{,}5$ мГн. Считая сопротивление контура ничтожно малым, определите амплитудное значение I_m силы тока в колебательном контуре. ***Ответ***: $I_m = 0{,}1$ А.

3.222.* Уравнение изменения со временем напряжения на обкладках конденсатора в колебательном контуре $U_C = 50\cos 800\pi t$, В. Электроемкость конденсатора $C = 1$ мкФ. Пренебрегая сопротивлением контура, определите период T колебаний, индуктивность L контура и закон изменения со временем силы тока в цепи. ***Ответ***: $T = 2{,}5$ мс; $L = 1{,}56$ Гн; $I = 0{,}126\cos(800\pi t + \pi/2)$, А.

3.223. В цепь переменного тока с частотой $\nu = 50$ Гц включен конденсатор. Пренебрегая активным сопротивлением, определите электроемкость C конденсатора, если вольтметр, подключенный к этой цепи, показывает напряжение $U = 220$ В, а амперметр — силу тока $I = 1$ А. ***Ответ***: $C = 14{,}5$ мкФ.

3.224. В цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц включена катушка индуктивности. Пренебрегая активным сопротивлением, определите индуктивность L катушки, если вольтметр, подключенный к этой цепи, показывает напряжение $U = 220$ В, а амперметр — силу тока $I = 1$ А. ***Ответ***: $L = 0{,}7$ Гн.

3.225. Два конденсатора электроемкостью $C_1 = 3$ мкФ и $C_2 = 6$ мкФ включены последовательно в цепь переменного тока напряжением $U = 220$ В и частотой $\nu = 50$ Гц. Определите силу тока I в цепи. ***Ответ***: $I = 0{,}138$ А.

3.226. В цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц последовательно включены резистор сопротивлением $R = 100$ Ом, катушка индуктивностью $L = 0{,}5$ Гн и конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ. Определите реактивные индуктивное R_L и емкостное R_C сопротивления, а также сопротивление Z цепи переменного тока. ***Ответ***: $R_L = 157$ Ом; $R_C = 318$ Ом; $Z = 190$ Ом.

3.227. К зажимам генератора подключен конденсатор электроемкостью $C = 0{,}1$ мкФ. Определите амплитудное значение напряжения U_m на зажимах, если амплитудное значение силы тока $I_m = 3{,}14$ А, а частота $\nu = 10$ кГц. ***Ответ***: $U_m = 500$ В.

3.228. В цепь колебательного контура, содержащего последовательно соединенные резистор сопротивлением $R = 40$ Ом, катушку индуктивностью $L = 0{,}36$ Гн и конденсатор емкостью $C = 28$ мкФ, подключено внешнее переменное напряжение с амплитудным значением $U_m = 180$ В и частотой $\omega = 314$ рад/с. Определите амплитудное значение силы тока I_m в цепи и сдвиг φ по фазе между током и внешним напряжением. ***Ответ***: $I_m = 4{,}5$ А; $\varphi = -1^\circ$.

3.229. В цепь переменного тока напряжением $U_m = 200$ В и частотой $\nu = 50$ Гц последовательно включены резистор сопротивлением $R = 100$ Ом, катушка индуктивностью $L = 0{,}5$ Гн и конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ. Определите амплитудные значения силы тока в цепи I_m, падения напряжения в активном сопротивлении U_{R_m}, на конденсаторе U_{C_m} и на катушке U_{L_m}. ***Ответ***: $I_m = 1,16$ А; $U_{R_m} = 116$ В; $U_{C_m} = 369$ В; $U_{L_m} = 182$ В.

3.230. В цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц последовательно включены резистор сопротивлением $R = 100$ Ом и конденсатор. Определите электроемкость C конденсатора, если сдвиг по фазе между колебаниями напряжения и силы тока составляет $\varphi = \pi/3$. ***Ответ***: $C = 55,1$ мкФ.

3.231. Колебательный контур содержит конденсатор электроемкостью $C = 2$ мкФ и катушку индуктивностью $L = 2$ мГн. Пренебрегая сопротивлением контура, определите резонансную частоту $\nu_{рез}$ электромагнитных колебаний. ***Ответ***: $\nu_{рез} = 1,01$ кГц.

3.232. В цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц последовательно включены резистор сопротивлением $R = 50$ Ом, катушка индуктивности и конденсатор электроемкостью $C = 10$ мкФ. Определите индуктивность L катушки, если в цепи наблюдается резонанс. ***Ответ***: $L = 1,01$ Гн.

3.233. В цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц последовательно включены резистор сопротивлением $R = 50$ Ом, катушка индуктивностью $L = 1$ Гн и конденсатор электроемкостью $C = 10$ мкФ. Определите амплитудное значение напряжения U_m, если амплитудное значение силы тока $I_m = 3$ А. ***Ответ***: $U_m = 151$ В.

3.234. В цепь переменного тока последовательно включены резистор, конденсатор и катушка индуктивности. Определите сопротивление R резистора, если при амплитудном значении внешнего напряжения $U_m = 155$ В амплитудное значение силы тока при резонансе $(I_m)_{рез} = 3,1$ А. ***Ответ***: $R = 50$ Ом.

3.235. Генератор, частота которого $\nu = 50$ кГц и амплитудное значение напряжения $U_m = 120$ В, включен в резонирующую цепь электроемкостью $C = 10$ мкФ. Определите амплитудное значение напряжения на конденсаторе U_{C_m}, если активное сопротивление цепи $R = 12$ Ом. ***Ответ***: $U_{C_m} = 3,18$ кВ.

3.236. Вольтметр, включенный в цепь переменного тока, показывает $U = 220$ В. Определите максимальное значение U_m напряжения в цепи. ***Ответ***: $U_m = 311$ В.

3.237. Определите момент времени t от начала колебаний, когда мгновенное значение силы переменного тока i станет равным его действующему значению I, если период колебаний T силы тока равен 2 с. ***Ответ***: $t = 0,25$ с.

3.238. В цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц и действующим значением напряжения $U = 120$ В последовательно включены резистор сопротивлением $R = 10$ Ом и катушка индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн. Определите амплитудное значение силы тока I_m в цепи. ***Ответ:*** $I_m = 5{,}15$ А.

3.239. Определите среднюю мощность $\langle P \rangle$, выделяемую в цепи переменного тока с активным сопротивлением $R = 0{,}1$ Ом, если амперметр, включенный в цепь, показывает значение 1 А. ***Ответ:*** $\langle P \rangle = 0{,}1$ Вт.

3.240. В колебательном контуре, содержащем катушку индуктивностью $L = 6$ мкГн, конденсатор электроемкостью $C = 1{,}2$ нФ и резистор сопротивлением $R = 0{,}2$ Ом, поддерживаются незатухающие колебания. Определите амплитудное значение напряжения на катушке U_{L_m}, если средняя мощность $\langle P \rangle$, потребляемая колебательным контуром, составляет 2 мВт. ***Ответ:*** $U_{L_m} = 10$ В.

3.241. Определите коэффициент мощности $\cos\varphi$ электрической цепи переменного тока, если средняя потребляемая мощность $\langle P \rangle = 1{,}76$ кВт, а вольтметр и амперметр, подключенные к цепи, показывают соответственно 220 В и 10 А. ***Ответ:*** $\cos\varphi = 0{,}8$.

3.242.* В неразветвленной цепи переменного тока (рис. 93) действующие значения напряжения на участках цепи соответственно равны $U_R = 40$ В, $U_L = 80$ В и $U_C = 50$ В. Определите полное напряжение в цепи U_{AB}. ***Ответ:*** $U_{AB} = 50$ В.

3.243.* В неразветвленной цепи переменного тока (см. рис. 93) действующие значения напряжения на участках цепи соответственно равны $U_R = 30$ В; $U_L = 30$ В и $U_C = 15$ В. Определите коэффициент мощности $\cos\varphi$. ***Ответ:*** $\cos\varphi = 0{,}8$

3.244. Скорость распространения электромагнитных волн в некоторой среде $\upsilon = 150$ Мм/с. Определите длину λ электромагнитных волн в этой среде, если частота их колебаний в вакууме $\nu_0 = 3$ МГц. ***Ответ:*** $\lambda = 50$ м.

3.245. Электромагнитная волна частотой $\nu = 9$ МГц переходит из немагнитной среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1{,}5$ в вакуум. Определите разность длин волн $\Delta\lambda$ в этой среде и вакууме. ***Ответ:*** $\Delta\lambda = 6{,}12$ м.

3.246. Колебательный контур содержит конденсатор электроемкостью $C = 2{,}5$ пФ и катушку индуктивностью $L = 10$ мкТл. Пренебрегая сопротивлением, определите длину λ_0 электромагнитных волн, излучаемых колебательным контуром в вакууме. ***Ответ:*** $\lambda_0 = 94{,}2$ м.

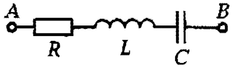


Рис. 93

3.247. Электроемкость переменного конденсатора приемника изменяется от C_1 до $C_2 = 36\ C_1$. Определите диапазон длин волн контура, если электроемкости C_1 конденсатора соответствует длина волны $\lambda_1 = 5$ м. ***Ответ:*** от 5 до 30 м.

3.248.* Пренебрегая сопротивлением колебательного контура, определите длину λ_0 электромагнитной волны в вакууме, на которую настроен контур, если максимальный заряд на обкладках конденсатора $Q_m = 25$ нКл, а максимальная сила тока в контуре $I_m = 2$ А. ***Ответ:*** $\lambda_0 = 23{,}6$ м.

3.249. Колебательный контур содержит конденсатор и катушку индуктивностью $L = 2$ мГн. Пренебрегая сопротивлением, определите электроемкость C конденсатора, если длина электромагнитных волн, излучаемых колебательным контуром в вакууме, $\lambda_0 = 750$ м. ***Ответ:*** $C = 79{,}2$ пФ.

3.250. Пренебрегая активным сопротивлением контура, определите длину волны λ_0 в вакууме, на которую настроен колебательный контур индуктивностью $L = 5$ мкГн, если максимальная сила тока в контуре $I_m = 2$ А, а максимальное напряжение на конденсаторе $U_m = 220$ В. ***Ответ:*** $\lambda_0 = 85{,}6$ м.

3.251. Длина λ_0 электромагнитной волны в вакууме, на которую настроен колебательный контур, равна 47,1 м. Пренебрегая сопротивлением контура, определите максимальную силу тока I_m в контуре, если максимальный заряд Q_m на обкладках конденсатора равен 25 нКл. ***Ответ:*** $I_m = 1$ А.

3.252. Определите скорость v распространения электромагнитных волн в немагнитной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2{,}2$. ***Ответ:*** $v = 2{,}02 \cdot 10^8$ м/с.

3.253. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Определите амплитуду B_m индукции магнитного поля электромагнитной волны, если амплитуда E_m напряженности электрического поля волны равна 9 В/м. ***Ответ:*** $B_m = 30$ нТл.

3.254. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Определите амплитуду E_m напряженности электрического поля электромагнитной волны, если амплитуда B_m индукции магнитного поля волны равна 40 нТл. ***Ответ:*** $E_m = 12$ В/м.

3.255.* Определите среднюю энергию W, переносимую электромагнитной волной через поверхность, площадь которой $S = 1{,}5$ см^2 за время $t = 5$ с, если поверхностная плотность потока излучения (интенсивность излучения) $I = 1$ мВт/м^2. ***Ответ:*** $W = 0{,}75$ мкДж.

3.256.* Определите поверхностную плотность потока электромагнитного излучения (интенсивность излучения) I в вакууме, если средняя объемная плотность энергии $\langle w \rangle$ электромагнитной волны равна $3 \cdot 10^{-10}$ Дж/м^3. ***Ответ***: $I = 0{,}09$ Вт/м^2.

3.257. Амплитуда напряженности E_m электрического поля электромагнитной волны в вакууме равна 10 В/м. Определите поверхностную плотность I потока излучения. ***Ответ***: $I = 0{,}266$ Вт/м^2.

Глава 16

Элементы геометрической оптики

Основные законы и формулы

■ Абсолютный показатель преломления среды

$$n = \frac{c}{v}$$

[c — скорость электромагнитных волн в вакууме; v — скорость электромагнитных волн в среде].

■ Показатель преломления второй среды относительно первой (относительный показатель преломления)

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$$

[n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления первой и второй сред].

■ Закон отражения света

$$\beta = \alpha$$

[α — угол падения; β — угол отражения].

■ Закон преломления света

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n_{21}$$

[α — угол падения; γ — угол преломления; n_{21} — показатель преломления второй среды относительно первой].

■ Связь угла φ отклонения лучей призмой и преломляющего угла A призмы

$$\varphi = A(n - 1)$$

[n — показатель преломления призмы].

■ Предельный угол полного отражения при распространении света из среды оптически более плотной в среду оптически менее плотную

$$\sin\alpha_{\text{пр}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}.$$

■ Формула сферического зеркала для параксиальных пучков

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{R}=\frac{1}{f}$$

[a — расстояние от полюса зеркала до предмета; b — расстояние от полюса зеркала до изображения предмета; R — радиус кривизны зеркала; f — главное фокусное расстояние зеркала].

■ Оптическая сила сферического зеркала

$$\Phi=\frac{1}{f}=\frac{2}{R}$$

[f — главное фокусное расстояние зеркала; R — радиус кривизны зеркала].

■ Увеличение сферического зеркала

$$\Gamma=\frac{b}{a}$$

[a и b — соответственно расстояние от полюса зеркала до предмета и изображения].

■ Оптическая сила линзы

$$\Phi=\frac{1}{f}$$

[f — фокусное расстояние линзы].

■ Формула тонкой линзы для параксиальных лучей

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

[a и b — соответственно расстояние от оптического центра линзы до предмета и его изображения; f — фокусное расстояние линзы].

Примеры решения задач

1 Луч света падает на границу раздела двух сред под углом $\alpha = 32°$. Определите показатель преломления n_2 второй среды, если показатель преломления n_1 первой среды равен 1,65, а преломленный и отраженный лучи взаимно перпендикулярны.

Дано: $\alpha = 32°$; $n_1 = 1{,}65$.

Найти: n_2.

Решение. Согласно условию задачи, преломленный и отраженный лучи перпендикулярны друг другу (рис. 94), т.е.

$$\beta + \gamma = 90^\circ.$$

Согласно закону отражения $\beta = \alpha$, поэтому

$$\alpha + \gamma = 90^\circ$$

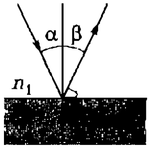


Рис. 94

Запишем закон преломления на границе раздела двух сред

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (1)$$

Учитывая выражение (1), имеем

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{n_2}{n_1},$$

откуда искомый показатель преломления второй среды

$$\boxed{n_2 = n_1 \operatorname{tg}\alpha}$$

Ответ: $n_2 = 1{,}03$.

2 Радиус кривизны вогнутого зеркала $R = 40$ см. Определите, на каком расстоянии a от полюса зеркала следует поместить предмет, чтобы его действительное изображение H было в два раза больше предмета h.

Дано: $R = 40$ см $= 0{,}4$ м; $H = 2h$.

Найти: a.

Решение. Чтобы в вогнутом зеркале получить действительное увеличенное изображение, предмет следует поместить между главным фокусом F и оптическим центром O зеркала (рис. 95).

Для построения изображения используем лучи, исходящие из точки A предмета: 1) луч *1*, параллельный главной оптической оси, который после отражения проходит через главный фокус; 2) луч *2*, проходящий через главный фокус, который после отражения от зеркала идет параллельно главной оптической оси. Точка пересечения A' отраженных лучей — действительное изображение точки A. Изображения всех остальных точек предмета лежат на перпендикуляре, опущенном из точки A' на главную оптическую ось. Таким образом, получили действительное увеличенное, перевернутое изображение.

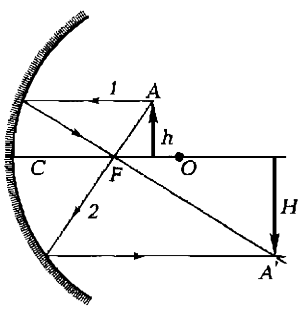


Рис. 95

Согласно формуле сферического зеркала

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{R} \tag{1}$$

[все расстояния взяты со знаком «+» (изображение действительное)]. По условию задачи

$$\frac{H}{h}=2=\frac{b}{a},$$

откуда

$$b = 2a. \tag{2}$$

Подставив (2) в формулу (1), получим

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}=\frac{2}{R},$$

откуда искомое расстояние

$$\boxed{a=\frac{3}{4}R}$$

Ответ: $a = 30$ см.

3 На расстоянии $a = 15$ см от полюса выпуклого сферического зеркала с радиусом кривизны $R = 20$ см поставлен предмет высотой $h = 10$ см. Определите расстояние b от полюса до изображения и высоту H изображения.

Дано: $a = 15$ см $= 0{,}15$ м; $R = 20$ см $= 0{,}2$ м; $h = 10$ см $= 0{,}1$ м.

Найти: b; H.

Решение. В выпуклом сферическом зеркале *при любом положении предмета* получается мнимое, прямое, уменьшенное изображение предмета, которое находится между главным фокусом и зеркалом.

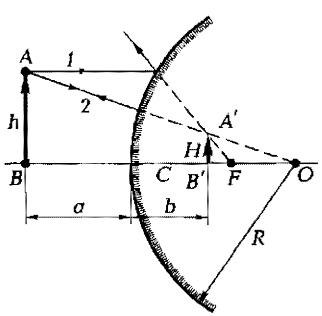


Рис. 96

Для построения изображения используем лучи, исходящие из точки A предмета: 1) луч *1*, параллельный главной оптической оси, продолжение которого после отражения проходит через фокус F; 2) луч *2*, проходящий через оптический центр O зеркала, который после отражения идет назад вдоль первоначального направления. Точка пересечения A' продолжения отраженных лучей — мнимое изображение точки A. Изображения всех остальных точек предмета лежат на перпендикуляре, опущенном из точки A' на главную оптическую ось (рис. 96).

Согласно формуле сферического зеркала для параксиальных лучей,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}=\frac{2}{R}, \qquad (1)$$

где f — главное фокусное расстояние зеркала (поскольку сферическое зеркало выпуклое, фокусное расстояние — величина отрицательная); b — расстояние до мнимого изображения — его следует также брать со знаком «–».

Поэтому для выпуклого сферического зеркала формула (1) имеет вид

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=-\frac{1}{f} \text{ или } -\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{R},$$

откуда искомое расстояние от полюса зеркала до изображения

$$\boxed{b=\frac{aR}{2a+R}}$$

Из подобия треугольников AOB и $A'OB'$ имеем

$$\frac{h}{H}=\frac{R+a}{R-b},$$

откуда искомая высота изображения

$$\boxed{H=\frac{R-b}{R+a}h}$$

Ответ: b = 6 см; H = 4 см.

4 Луч света падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку (показатель преломления стекла n = 1,5) под углом $\alpha = 30^\circ$. Определите толщину d пластинки, если вышедший из пластинки луч смещен относительно продолжения падающего луча на расстояние h = 1,5 см.

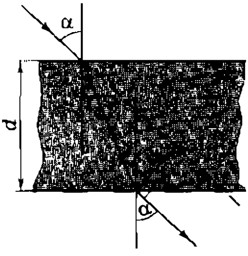


Рис. 97

Дано: n = 1,5; α = 30°; h = 1,5 см = $1{,}5\cdot10^{-2}$ м.

Найти: d.

Решение. Вышедший из пластинки луч будет параллелен падающему (ход лучей показан на рис. 97). Из рисунка следует, что

$$\frac{d}{\cos\gamma}=\frac{h}{\sin(\alpha-\gamma)},$$

откуда

$$d=\frac{h\cos\gamma}{\sin(\alpha-\gamma)}=\frac{h\cos\gamma}{\sin\alpha\cos\alpha-\cos\gamma\sin\gamma}. \qquad (1)$$

На основании закона преломления

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=n,$$

откуда $\sin\gamma=\frac{\sin\alpha}{n}$. Подставив это значение в формулу (1), а также выразив косинус угла через синус, найдем искомую толщину пластинки

$$\boxed{d=\frac{h\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha\left(\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}-\sqrt{1-\sin^2\alpha}\right)}}$$

Ответ: d = 7,73 см.

5 На расстоянии a = 6 см от двояковыпуклой тонкой линзы с оптической силой Ф = 25 дптр перпендикулярно главной оптической оси находится предмет высотой h = 5 см. Определите расстояние b от изображения до линзы и высоту H изображения. Среды по обе стороны линзы одинаковы.

Дано: $a = 6$ см $= 6\cdot10^{-2}$ м; Ф = 25 дптр; $h = 5$ см $= 5\cdot10^{-2}$ м.

Найти: b; H.

Решение. Чтобы построить изображение предмета в линзе, найдем ее фокусное расстояние.

Оптическая сила тонкой линзы

$$\Phi=\frac{1}{f},$$

где f — фокусное расстояние, откуда

$$f=\frac{1}{\Phi}=4\cdot10^{-2}\,\text{м}.$$

Для построения изображения используем лучи, исходящие из точки A предмета: 1) луч *1*, идущий параллельно главной оптической оси, который после преломления в линзе проходит через второй фокус линзы; 2) луч *2*, проходящий через оптический центр линзы и не изменяющий своего направления. Точка пересечения A' этих лучей и есть действительное изображение точки A. Изображения всех остальных точек предмета лежат на перпендикуляре, опущенном из точки A' на главную оптическую ось (рис. 98).

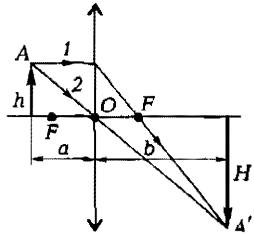


Рис. 98

Из построения следует, что при помещении предмета между двойным фокусным расстоянием и фокусом (см. условие задачи) изображение находится за двойным фокусным расстоянием по другую сторону линзы и является действительным, перевернутым и увеличенным.

Согласно формуле тонкой линзы,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f},$$

откуда искомое расстояние изображения от линзы

$$\boxed{b=\frac{af}{a-f}}$$

Из рис. 98 следует, что

$$\frac{h}{H}=\frac{a}{b},$$

откуда искомая высота изображения

$$\boxed{H=\frac{bh}{a}}$$

Ответ: b = 12 см; H = 10 см.

Задачи для самостоятельного решения

3.258. Определите скорость v распространения света в среде, абсолютный показатель преломления которой n = 1,6. ***Ответ***: $v = 1{,}88 \cdot 10^8$ м/с.

3.259. Определите абсолютный показатель преломления n воды, если длина волны λ_0 желтого света в вакууме 583 нм, а в воде λ = 438 нм. ***Ответ***: n = 1,33.

3.260. Свет падает из воды (абсолютный показатель преломления 1,33) в алмаз (абсолютный показатель преломления 2,42). Определите относительный показатель преломления n сред. ***Ответ***: n = 1,82.

3.261. Луч света переходит из бензола (абсолютный показатель преломления $n_1 = 1,5$) в воду ($n_2 = 1,33$). Определите угол γ преломления луча, если угол падения $\alpha = 45°$. ***Ответ***: $\gamma = 52,9°$.

3.262. Луч света переходит из воды (абсолютный показатель преломления $n_1 = 1,33$) в алмаз ($n_2 = 2,42$). Определите угол падения α луча, если угол преломления $\gamma = 30°$. ***Ответ***: $\alpha = 65,5°$.

3.263. Луч света падает на границу раздела двух сред под углом $\alpha = 34°$. Определите показатель преломления n_2 второй среды, если показатель преломления n_1 первой среды равен 2,42, а отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны. ***Ответ***: $n_2 = 1,63$.

3.264. Световой луч падает на поверхность алмаза (показатель преломления $n_1 = 2,42$) под углом $\alpha_1 = 40°$. Определите, под каким углом α_2 он должен упасть на поверхность воды (показатель преломления $n_2 = 1,33$), чтобы угол преломления в алмазе был равен углу преломления в воде. ***Ответ***: $\alpha_2 = 20,7°$.

3.265. На стеклянную призму с показателем преломления $n = 1,6$ и преломляющим углом $A = 50°$ под углом $\alpha_1 = 30°$ падает монохроматический луч света. Определите угол φ отклонения луча призмой. ***Ответ***: $\varphi = 37,5°$.

3.266. Монохроматический луч света падает на боковую грань равнобедренной призмы с преломляющим углом $A = 30°$? и после преломления идет параллельно основанию призмы. Определите угол φ отклонения луча призмой, если показатель преломления n материала призмы равен 1,7. ***Ответ***: $\varphi = 22,2°$.

3.267. На грань стеклянной призмы с показателем преломления $n - 1,6$ нормально падает монохроматический луч света. Определите угол отклонения φ луча призмой, если ее преломляющий угол $A = 15°$. ***Ответ***: $\varphi = 9,5°$.

3.268. Монохроматический луч света падает нормально на вертикальную грань призмы с показателем преломления $n = 1,6$ и преломляющим углом $A = 30°$. Определите угол φ отклонения луча призмой. ***Ответ***: $\varphi = 23,1°$.

3.269. Определите предельный угол $\alpha_{пр}$ при переходе светового луча из алмаза (абсолютный показатель преломления $n_1 = 2,42$) в стекло ($n_2 = 1,5$). ***Ответ***: $\alpha_{пр} = 38,3°$.

3.270. Предельный угол полного отражения на границе алмаз — жидкость $\alpha_{пр} = 42°$. Определите показатель преломления жидкости $n_ж$, если показатель преломления алмаза $n = 2,42$. ***Ответ***: $n_ж = 1,62$.

3.271. Луч света переходит из алмаза в воздух. Определите скорость v света в алмазе, если предельный угол $\alpha_{пр} = 24{,}4°$. ***Ответ***: $v = 1{,}24 \cdot 10^8$ м/с.

3.272. Определите преломляющий угол A призмы из стекла с показателем преломления $n = 1{,}6$, если монохроматический луч света падает нормально на одну из граней призмы и выходит из призмы вдоль другой грани. ***Ответ***: $A = 38{,}7°$.

3.273. Определите угол α падения светового луча на плоское зеркало, чтобы угол γ между отраженным лучом и поверхностью зеркала составил $20°$. ***Ответ***: $\alpha = 70°$.

3.274. Луч света падает на плоское зеркало под углом $\alpha_1 = 30°$. Определите изменение угла γ между падающим и отраженным лучами, если луч будет падать на зеркало под углом $\alpha_2 = 45°$. ***Ответ***: $\gamma = 30°$.

3.275. Определите, на какой угол γ повернется луч, отраженный от плоского зеркала, если зеркало повернуть на угол $\alpha = 15°$. ***Ответ***: $\gamma = 30°$.

3.276. В коридоре висит зеркало, верхний край которого находится на уровне волос верхней части головы человека ростом $h = 150$ см. Определите наименьшую длину l зеркала, при которой человек смог увидеть себя в полный рост. ***Ответ***: $l = 80$ см.

3.277. Два плоских зеркала образуют двугранный угол $A = 50°$. На одно из зеркал под углом $\alpha_1 = 20°$ падает световой луч. Определите угол φ поворота отраженного луча после его отражения от обоих зеркал. ***Ответ***: $\varphi = 2A$ (не зависит от угла падения луча на зеркало).

3.278. Радиус кривизны R вогнутого сферического зеркала равен 30 см. Определите, на каком расстоянии a от полюса зеркала следует поместить предмет, чтобы его действительное изображение было в два раза больше предмета. ***Ответ***: $a = 22{,}5$ см.

3.279. Вогнутое сферическое зеркало дает на экране 10-кратное действительное увеличение, когда предмет находится на расстоянии $a = 33$ см от полюса зеркала. Определите фокусное расстояние f и радиус кривизны R этого зеркала. ***Ответ***: $f = 30$ см; $R = 60$ см.

3.280. Расстояние a от предмета до вогнутого сферического зеркала равно двум радиусам кривизны R зеркала. Определите расстояние b от изображения предмета до полюса зеркала и постройте изображение предмета. ***Ответ***: $b = \dfrac{2}{3}R$.

3.281. Радиус R кривизны вогнутого сферического зеркала равен 45 см. Определите, на каком расстоянии a от полюса зеркала следует поместить предмет, чтобы его изображение было мнимым и увеличенным в три раза. ***Ответ***: $a = 15$ см.

3.282. Определите расстояние a, на котором следует поместить предмет от полюса вогнутого сферического зеркала с фокусным расстоянием $f = 30$ см, чтобы изображение предмета совпало с самим предметом. Постройте изображение. ***Ответ***: $a = 60$ см.

3.283. На расстоянии $a = 30$ см от полюса выпуклого сферического зеркала с радиусом кривизны $R = 40$ см поставлен предмет, высота которого $h = 20$ см. Определите расстояние b от полюса зеркала до изображения и высоту H изображения. ***Ответ***: $b = 12$ см; $H = 8$ см.

3.284. Определите, во сколько раз высота изображения предмета, находящегося на расстоянии $a = 60$ см от полюса выпуклого сферического зеркала с фокусным расстоянием $f = 30$ см, меньше высоты самого предмета. ***Ответ***: в 3 раза.

3.285. Определите расстояние a предмета от полюса выпуклого сферического зеркала с фокусным расстоянием $f = 60$ см, если его изображение в два раза меньше самого предмета. ***Ответ***: $a = 60$ см.

3.286. На горизонтальном дне бассейна глубиной $h = 80$ см лежит плоское зеркало. Луч света входит в воду под углом $\alpha = 45^\circ$. Определите расстояние s от места вхождения луча в воду до выхода его на поверхность воды после отражения от зеркала. Показатель преломления воды $n = 1{,}33$. ***Ответ***: $s = 1$ м.

3.287. Луч света падает под углом $a = 30^\circ$ на плоскопараллельную стеклянную пластинку с показателем преломления $n = 1{,}5$. Определите толщину d пластинки, если прошедший ее луч, выходя параллельно падающему лучу, имеет боковое смещение $h = 9{,}7$ мм. ***Ответ***: $d = 5{,}02$ см.

3.288. Луч света падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку с показателем преломления $n = 1{,}71$ и толщиной $d = 1$ см под углом $\alpha = 44^\circ$. Определите боковое смещение h луча, прошедшего сквозь эту пластинку. ***Ответ***: $h = 3{,}74$ см.

3.289. Определите глубину h, на которой кажется расположенной монета, лежащая на глубине $H = 90$ см, если угол α между лучом зрения и вертикалью составляет 45°. Показатель преломления воды $n = 1{,}33$. ***Ответ***: $h = 56{,}5$ м.

3.290. Определите истинную глубину H озера, если его кажущаяся глубина $h = 1$ м и угол между лучом зрения и вертикалью составляет $\gamma = 60^\circ$. Показатель преломления воды $n = 1{,}33$. ***Ответ***: $H = 2{,}45$ м.

3.291. Предмет высотой $h = 10$ см расположен перед двояковыпуклой линзой, имеющей оптическую силу $\Phi = 2$ дптр. Определите фокусное расстояние f линзы и высоту H изображения предмета, если линейное увеличение линзы $\Gamma = 1{,}5$. ***Ответ***: $f = 50$ см; $H = 15$ см.

3.292. Предмет находится на расстоянии $d = 1{,}1$ м от экрана. Где следует поместить собирательную линзу, чтобы получить 10-кратное увеличение предмета? ***Ответ***: $b = 1$ м.

3.293. Предмет находится на расстоянии $d = 1$ м от экрана. Определите оптическую силу Φ линзы, если она дает 5-кратное увеличение. ***Ответ***: $\Phi = 7{,}2$ дптр.

3.294. Предмет высотой $h = 5$ см расположен на расстоянии $a = 12$ см перед двояковыпуклой линзой с оптической силой $\Phi = 10$ дптр. Определите расстояние b изображения предмета от линзы и высоту H изображения. Что это за изображение (подтвердите построением)? ***Ответ***: $b = 60$ см; $H = 25$ см.

3.295. Предмет высотой $h = 15$ см расположен на расстоянии $a = 40$ см перед двояковыпуклой линзой с оптической силой $\Phi = 2$ дптр. Определите фокусное расстояние f линзы, расстояние b изображения предмета от линзы и высоту H изображения. Что это за изображение (подтвердите построением)? ***Ответ***: $f = 0{,}5$ м; $b = -2$ м; $H = -0{,}75$ м,

3.296. На расстоянии $a = 20$ см от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $f = 40$ см перпендикулярно главной оптической оси находится предмет высотой $h = 10$ см. Определите расстояние b изображения от линзы и высоту H изображения. Среды по обе стороны линзы одинаковы. ***Ответ***: $b = 13{,}3$ см; $H = 6{,}65$ см.

3.297. Линза с фокусным расстоянием $f = 30$ см дает уменьшенное в три раза мнимое изображение. Определите расстояние a предмета до линзы и расстояние b изображения предмета от линзы. ***Ответ***: $a = 60$ см; $b = 20$ см.

Глава 17

Природа света. Основы фотометрии

Основные законы и формулы

■ Скорость распространения электромагнитных волн в среде

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

[$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ — скорость распространения света в вакууме; ε_0 и μ_0 — соответственно электрическая и магнитная постоянные; ε и μ — соответственно электрическая и магнитная проницаемость среды].

■ Зависимость между длиной λ световой волны и частотой ν электромагнитных колебаний

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

[$c = 3\cdot 10^8$ м/с — скорость распространения света в вакууме].

■ Световой поток (поток излучения)

$$\Phi = \frac{W}{t}$$

[W — энергия излучения; t — время излучения].

■ Сила света

$$I = \frac{\Phi}{\Omega}$$

[Φ — световой поток, распространяющийся внутри телесного угла Ω].

■ Полный световой поток, испускаемый изотропным точечным источником света,

$$F_0 = 4\pi I$$

[I — сила света].

■ Освещенность поверхности

$$E = \frac{\Phi}{S}$$

[Ф — световой поток, падающий на поверхность; S — площадь этой поверхности].

■ Законы освещенности

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2; \; E = E_0 \cos\alpha$$

[r_1 и r_2 — соответственно расстояние от источника до рассматриваемой точки; E_0 — освещенность поверхности, перпендикулярной световым лучам; α — угол падения лучей на поверхность].

Примеры решения задач

1 Определите полный световой поток Ф, излучаемый светильником, в виде равномерно светящегося шара силой света $I = 200$ кд и освещенность E экрана площадью $S_1 = 0,2$ м^2, на который падает 30 % светового потока, излучаемого данным светильником.

Дано: $I = 200$ кд; $\Phi_1 = 0,3\Phi$; $S_1 = 0,2$ м^2.

Найти: Ф; E.

Решение. Полный световой поток, испускаемый изотропным точечным источником,

$$\boxed{\Phi = 4\pi I}$$

Освещенность экрана

$$E = \frac{\Phi_1}{S_1},$$

где по условию задачи световой поток, падающий на экран, $\Phi_1 = 0,3\Phi$. Тогда

$$\boxed{E = \frac{0,3\Phi}{S_1}}$$

$$[\Phi] = \text{ср}\cdot\text{кд} = \text{лм}, \; [E] = \text{лм/м}^2 = \text{лк}.$$

Ответ: Ф = 2,51 клм; $E = 3,77$ клк.

2 Выразите законы освещенности через силу света I источника, если угол падения лучей на поверхность равен α.

Дано: I; α

Найти: $E(I)$.

Решение. При равномерном распределении падающего на поверхность светового потока Ф освещенность

$$E = \frac{\Phi}{S}, \qquad (1)$$

где S — площадь этой поверхности.

Точечный источник испускает световой поток равномерно во все стороны. Площадь поверхности сферы

$$S = 4\pi r^2, \qquad (2)$$

полный световой поток

$$\Phi = 4\pi I, \qquad (3)$$

где I — сила света.

Подставив (2) в (3) в формулу (1), получаем

$$E_0 = \frac{I}{r^2},$$

где E_0 — освещенность поверхности при перпендикулярном падении лучей.

Согласно второму закону освещенности,

$$E = E_0 \cos\alpha,$$

где E — освещенность поверхности при падении светового луча под углом α.

Из двух последних формул находим искомую зависимость

$$E = \frac{I}{r^2}\cos\alpha$$

— *обобщенный закон освещенности.*

Задачи для самостоятельного решения

3.298. Определите световой поток Φ, испускаемый точечным источником силой света $I = 50$ кд внутри телесного угла $\Omega = 0{,}4$ ср. ***Ответ***: $\Phi = 20$ лм.

3.299. Определите, во сколько раз полный световой поток, испускаемый точечным источником, больше светового потока, испускаемого тем же источником внутри телесного угла $\Omega = 0{,}5$ ср. ***Ответ***: в 25,1 раза.

3.300. Определите световой поток Φ, падающий на площадь поверхностью $S = 2$ см^2, если ее освещенность $E = 1$ лк. ***Ответ***: $\Phi = 2 \cdot 10^{-4}$ лм.

3.301. Для печатания фотографий при использовании лампы с силой света $I_1 = 80$ кд время экспозиции $t_1 = 1{,}5$ с. Определите время экспозиции t_2 при замене этой лампы лампой силой света

$I_2 = 60$ кд, если в обоих случаях световая энергия W одинакова. ***Ответ***: $t_2 = 2$ с.

3.302. Параллельный пучок света, падая на поверхность под углом $\alpha_1 = 30^\circ$, создает освещенность $E_1 = 100$ лк. Определите освещенность E_2 этой поверхности при угле падения $\alpha_2 = 60^\circ$. ***Ответ***: $E_2 = 57{,}7$ лк.

3.303. Определите освещенность E под лампочкой силой света $I = 50$ кд, висящей без абажура на расстоянии $r = 0{,}5$ м над столом. ***Ответ***: $E = 200$ лк.

3.304. Расстояние r_1 от первой лампочки силой света $I_1 = 50$ кд до экрана равно 20 см, второй лампочки $r_2 = 40$ см. Определите силу света I_2 второй лампочки. ***Ответ***: $I_2 = 200$ кд.

3.305. В центре квадратной комнаты площадью $S = 25$ м^2 на высоте $h = 1{,}8$ м висит светильник силой света $I = 150$ кд. Считая светильник точечным источником света, определите освещенность E в одном из углов комнаты. ***Ответ***: $E = 4{,}33$ лк.

Глава 18

Волновая оптика

Основные законы и формулы

■ Скорость света в среде

$$v = \frac{c}{n}$$

[c — скорость распространения света в вакууме; n — абсолютный показатель преломления среды].

■ Оптическая длина пути

$$L = ns$$

[s — геометрическая длина пути световой волны в среде; n — показатель преломления этой среды].

■ Оптическая разность хода двух световых волн

$$\Delta = L_2 - L_1$$

[L_2 и L_1 — соответственно оптические длины проходимых волнами путей].

■ Разность фаз двух когерентных волн

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$$

[λ — длина волны в вакууме; Δ — оптическая разность хода двух световых волн].

■ Условие интерференционных максимумов и минимумов

- $\Delta = \pm 2k\frac{\lambda}{2}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$);

- $\Delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$)

[λ — длина волны в вакууме].

■ Условия максимумов и минимумов при интерференции света, отраженного от верхней и нижней поверхностей тонкой плоскопараллельной пленки, находящейся в воздухе:

- $2dn\cos\gamma = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \frac{\lambda}{2} = 2k\frac{\lambda}{2}$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$;
- $2dn\cos\gamma = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$

[d — толщина пленки; n — ее показатель преломления; α — угол падения; γ — угол преломления; λ — длина волны в вакууме].

■ Радиусы светлых и темных колец Ньютона в отраженном свете (или темных в проходящем свете)

$$r_{\text{св}} = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda R}; \quad r_{\text{т}} = \sqrt{k\lambda R}$$

[$k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ — номер кольца; R — радиус кривизны линзы; λ — длина волны в вакууме].

■ В случае «просветления оптики» интерферирующие лучи в отраженном свете гасят друг друга при условии

$$n = \sqrt{n_{\text{с}}};\ 2nd = (2k+1)\frac{\lambda}{2}\ (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

[$n_{\text{с}}$ — показатель преломления стекла; n — показатель преломления пленки; nd — оптическая толщина пленки; λ — длина волны в вакууме].

■ Период дифракционной решетки

$$d = a + b; \quad d = \frac{1}{N_0}$$

[a — ширина каждой щели решетки; b — ширина непрозрачных участков между щелями; N_0 — число щелей, приходящихся на единицу длины дифракционной решетки].

■ Условие максимумов дифракционной решетки, на которую свет падает нормально:

$$d\sin\varphi = \pm 2k\frac{\lambda}{2}\ (k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

[d — период дифракционной решетки; φ — угол дифракции; λ — длина волны в вакууме].

■ Число максимумов, наблюдаемых с помощью дифракционной решетки:

$$k \le \frac{d}{\lambda}$$

[d — период дифракционной решетки; λ — длина волны в вакууме].

■ Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} \alpha_{Бр} = n_{21}$$

[$\alpha_{Бр}$ — угол падения, при котором отраженный от диэлектрика луч является плоскополяризованным; n_{21} — относительный показатель преломления].

■ Эффект Доплера для электромагнитных волн

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + \upsilon/c}{1 - \upsilon/c}}$$

[ν_0 — частота колебаний источника; ν — частота колебаний, воспринимаемых приемником; υ — скорость сближения источника и наблюдателя вдоль соединяющей их прямой].

■ Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра

$$\lambda_{min} = \frac{ch}{eU}$$

[e — заряд электрона, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл); U — разность потенциалов, приложенная к рентгеновской трубке; c — скорость света в вакууме; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка].

Примеры решения задач

1 На экране в результате наложения лучей от двух когерентных источников ($\lambda = 560$ нм) наблюдается интерференционная картина. На пути одного из лучей перпендикулярно ему поместили стеклянную пластинку ($n = 1{,}7$), при этом интерференционная картина сместилась на восемь полос. Определите толщину d пластинки.

Дано: $\lambda = 560$ нм $= 5{,}6 \cdot 10^{-7}$ м; $n = 1{,}7$; $k = 8$.

Найти: d.

Решение. При внесении стеклянной пластинки оптическая разность хода между лучами изменится на

$$\Delta = nd - d = d(n - 1),$$

где d — толщина пластинки; n — ее показатель преломления.

С другой стороны, внесение пластинки приведет к смещению интерференционной картины на k полос, т. е. дополнительная разность хода равна $k\lambda$. Следовательно,

$$d(n - 1) = k\lambda,$$

откуда искомая толщина пластинки

$$\boxed{d = \frac{k\lambda}{n-1}}$$

Ответ: $d = 6{,}4$ мкм.

2 Два когерентных источника S_1 и S_2 испускают монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Определите положение третьей темной x_{3min} и второй светлой x_{2max} полос, если расстояние между источниками $d = 2$ мм, а расстояние от обоих источников до экрана $l = 2$ м.

Дано: $\lambda = 600$ нм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м; $d = 2$ мм $= 2 \cdot 10^{-3}$ м; $l = 2$ м.

Найти: x_{3min}; x_{2max}.

Решение. Интенсивность в любой точке A экрана, лежащей на расстоянии x от точки O, симметричной относительно когерентных источников (рис. 99), определяется оптической разностью хода

$$\Delta = s_1 - s_2. \tag{1}$$

Применяя теорему Пифагора, имеем

$$s_1^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2, \tag{2}$$

$$s_2^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2. \tag{3}$$

Вычитая почленно из выражения (2) выражение (3), получим

$$s_1^2 - s_2^2 = 2xd$$

или

$$\Delta = s_1 - s_2 = \frac{2xd}{s_1 + s_2}.$$

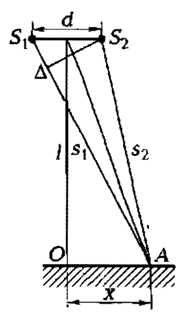


Рис. 99

Согласно условию задачи, $l \gg d$, тогда $s_1 + s_2 = 2l$. Поэтому оптическая разность хода

$$\Delta = \frac{xd}{l}. \tag{4}$$

Интерференционный минимум наблюдается при оптической разности хода, равной полуцелому числу длин волн в вакууме:

$$\Delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{5}$$

Приравняв выражения (4) и (5):

$$\frac{x_{\min}d}{l}=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

найдем положение темных полос

$$x_{\min}=\pm\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{l}{d}\lambda.$$

Тогда искомое положение третьей темной полосы (k = 3)

$$\boxed{x_{3\min}=\pm\frac{7}{2}\frac{l\lambda}{d}}$$

Интерференционный максимум наблюдается при оптической разности хода, равной целому числу длин волн в вакууме:

$$\Delta=\pm2k\frac{\lambda}{2}\ \ (k=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (6)$$

Приравняв (4) и (6):

$$\frac{x_{\max}d}{l}=\pm k\lambda,$$

найдем положение светлых полос

$$x_{\max}=\pm k\frac{l}{d}\lambda.$$

Тогда искомое положение второй светлой полосы (k = 2)

$$\boxed{x_{2\max}=\pm2\frac{l\lambda}{d}}$$

Ответ: $x_{3\min}$ = ±2,1 мм; $x_{2\max}$ = ±1,2 мм

3 На плоскопараллельную стеклянную пластинку с показателем преломления n = 1,6 под углом α = 45° падает параллельный пучок белого света. Определите наименьшую толщину стеклянной пластинки $d_{\min}$, при которой отраженный свет наиболее сильно окрасится в красный цвет (λ = 750 нм).

Дано: n = 1,6; α = 45°; λ = 750 нм = $7{,}5\cdot10^{-7}$ м.

Найти: $d_{\min}$.

Решение. Световой луч *1*, выделенный из параллельного пучка белого света, падающего под углом α на плоскопараллельную пластинку, в точках A, B и C частично отражается и частично преломляется (рис. 100).

Оптическая разность хода, возникающая между двумя интерферирующими лучами от точки A до плоскости DC:

$$\Delta = (AB + BC)n - AD - \frac{\lambda}{2}, \qquad (1)$$

где учтено, что показатель преломления среды, окружающей пластинку, равен 1, и при отражении от верхней поверхности пластинки (от среды оптически более плотной) теряется полволны (у отраженной волны происходит скачок фазы на π).

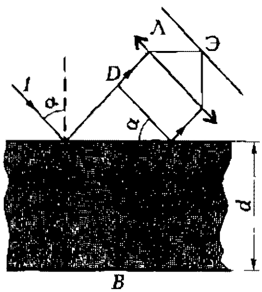


Рис. 100

Из рис. 100 следует, что

$$AB = \frac{d}{\cos\gamma} AD = AC\sin\alpha = 3AE\sin\alpha = 2d\,\mathrm{tg}\gamma\sin\alpha,$$

где d — толщина пленки; α — угол падения; γ — угол преломления.

Подставив эти значения в формулу (1) и учитывая закон преломления $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n$, получаем

$$\Delta = \frac{2dn}{\cos\gamma} - 2d\,\mathrm{tg}\gamma\sin\alpha - \frac{\lambda}{2} = 2dn\sqrt{1-\sin^2\gamma} - \frac{\lambda}{2} =$$

$$= 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \frac{\lambda}{2}.$$

Интерференционный максимум наблюдается при оптической разности хода, равной целому числу длин полуволн, $\Delta = k\lambda$. Поэтому можно записать

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \frac{\lambda}{2} = k\lambda. \qquad (2)$$

Для наименьшей толщины пленки $k = 1$. Следовательно, выражение (2) можно записать в виде

$$2d_{\min}\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \frac{\lambda}{2} = \lambda,$$

откуда искомая минимальная толщина пленки

$$\boxed{d_{\min} = \frac{3\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}}$$

Ответ: $d_{\min} = 392$ нм.

4* Установка для наблюдения колец Ньютона (рис. 101) освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 550$ нм, падающим нормально. Определите толщину d воздушного зазора, образованного плоскопараллельной пластинкой и соприкасающейся с ней плосковыпуклой линзой в том месте, где наблюдается второе темное кольцо в отраженном свете.

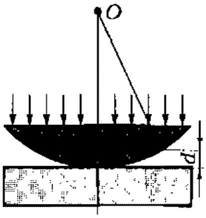


Рис. 101

Дано: $\lambda = 550$ нм $= 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м; $\alpha = 0$; $k = 2$; $n = 1$.

Найти: d.

Решение. Параллельный пучок света, падая нормально на плоскую поверхность линзы, частично отражается от верхней и нижней поверхностей воздушного зазора между линзой и пластинкой. При наложении отраженных лучей возникают кольцевые полосы равной толщины.

Запишем условие образования темных колец (интерференционных минимумов)

$$\Delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{1}$$

т. е. оптическая разность хода Δ лучей, отраженных от обеих поверхностей воздушного зазора, должна быть равна нечетному числу полуволн.

С другой стороны, в отраженном свете

$$\Delta = 2dn\cos\gamma + \frac{\lambda}{2} = 2d + \frac{\lambda}{2} \tag{2}$$

(учли, что показатель преломления воздуха $n = 1$, угол преломления $\gamma = 0$ (по условию задачи угол падения $\alpha = 0$), $\frac{\lambda}{2}$ — потеря полуволны при отражении от оптически менее плотной среды).

Приравняв выражения (1) и (2), имеем

$$2d + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

откуда искомая толщина воздушного зазора

$$\boxed{d = \frac{k\lambda}{2}}$$

Ответ: $d = 550$ нм.

5 На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. На экран, находящийся от решетки на расстоянии $L = 0{,}8$ м, с помощью линзы, расположенной вблизи решетки, проецируется дифракционная картина, причем первый главный максимум наблюдается на расстоянии $l = 10$ см от центрального (рис. 102). Определите период d дифракционной решетки, число штрихов n на 1 см ее длины и общее число N максимумов, наблюдаемых с помощью дифракционной решетки.

Дано: $\lambda = 600$ нм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м; $L = 0{,}8$ м; $k = 1$; $l = 10$ см $= 0{,}1$ м; $l' = 1$ см $= 10^{-2}$ м.

Найти: d; n; N.

Решение. Период дифракционной решетки найдем из условия главного максимума

$$d \sin\varphi = k\lambda, \tag{1}$$

где k — порядок спектра (номер максимума; по условию задачи $k = 1$).

Из рисунка следует, что $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{l}{L}$. Так как $l \ll L$, то $\operatorname{tg}\varphi \approx \sin\varphi$. Выражение (1) можно записать в виде

$$\frac{ld}{L} = k\lambda,$$

откуда искомый период дифракционной решетки

$$\boxed{d = \frac{k\lambda L}{l}}$$

Число штрихов на $l' = 1$ см равно

$$\boxed{n = \frac{l'}{d}}$$

Поскольку наибольший угол отклонения лучей решеткой не может быть более $\pi/2$, из условия (1) найдем максимальное значение

$$k_{max} \le \frac{d}{\lambda}$$

(приняли $\sin\varphi_{max} = 1$). Естественно, что число k_{max} должно быть целым.

Общее число максимумов, даваемых дифракционной решеткой,

$$N = 2k_{max} + 1,$$

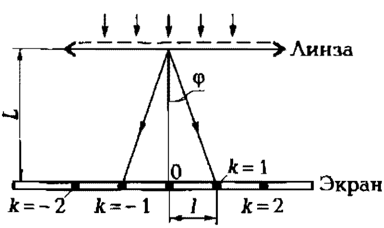


Рис. 102

так как максимумы наблюдаются как справа, так и слева от центрального максимума (единица учитывает центральный максимум).

$$\boxed{N = \frac{2d}{\lambda} + 1}$$

Ответ: $d = 4{,}8$ мкм; $n = 2{,}08 \cdot 10^3$ см$^{-1}$; $N = 17$.

6 Пучок естественного света падает на стекло с показателем преломления $n = 1{,}54$. Определите, при каком угле преломления отраженный от стекла пучок света будет полностью поляризован.

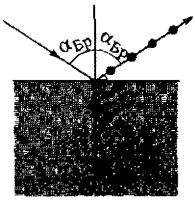


Рис. 103

Дано: $n = 1{,}54$.

Найти: γ.

Решение. Свет, отраженный от диэлектрика, полностью поляризован, если он падает на диэлектрик под углом Брюстера (рис. 103). Согласно закону Брюстера,

$$\operatorname{tg}\alpha_{Бр} = n_{21},$$

где n_{21} — относительный показатель преломления [показатель преломления второй среды (стекла) относительно первой (воздуха)]; $n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = n$ (так как $n_1 = 1$).

Имеем

$$\alpha_{Бр} = \operatorname{arctg} n = 57^\circ.$$

Если свет падает на границу раздела под углом Брюстера, то отраженный и преломленный лучи взаимно-перпендикулярны $\left(\operatorname{tg}\alpha_{Бр} = \frac{\sin\alpha_{Бр}}{\cos\alpha_{Бр}};\ n_{21} = \frac{\sin\alpha_{Бр}}{\sin\gamma}\right.$, откуда $\left.\alpha_{Бр} = \sin\gamma\right)$. Следовательно, $\alpha_{Бр} + \gamma = \pi/2$, но $\alpha'_{Бр} = \alpha_{Бр}$ (закон отражения), поэтому $\alpha'_{Бр} + \gamma = \pi/2$. Искомый угол преломления, при котором отраженный луч полностью поляризован,

$$\boxed{\gamma = 90^\circ - \alpha_{Бр}}$$

Ответ: $\gamma = 33^\circ$.

7 Определите длину волны λ_0 границы сплошного рентгеновского спектра, если скорость v электронов, бомбардирующих анод рентгеновской трубки, равна $0{,}8c$.

Дано: $v = 0{,}8c$; $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг.

Найти: λ_0.

Решение. Согласно закону сохранения, энергия рентгеновского фотона не может быть больше кинетической энергии $E_к$ электрона, бомбардирующего анод рентгеновской трубки, т. е.

$$E_{max} = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = E_к, \qquad (1)$$

где E_{max} — максимальная энергия рентгеновского фотона; ν_0 — максимальная частота фотона; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме.

Скорость v сравнима со скоростью c, поэтому

$$E_к = m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right), \qquad (2)$$

где m_e — масса электрона.

Приравняв выражения (1) и (2):

$$\frac{hc}{\lambda_0} = m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right),$$

получим искомую границу сплошного рентгеновского спектра

$$\boxed{\lambda_0 = \frac{h}{m_e c \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)}}$$

$$[\lambda_0] = \frac{Дж \cdot с}{кг \cdot м/с} = \frac{Дж}{Н} = м.$$

Ответ: $\lambda_0 = 3{,}64$ пм.

Задачи для самостоятельного решения

3.306. Плоская электромагнитная волна падает нормально на границу раздела воздух — алмаз. Определите длину волны λ в алмазе, если длина волны λ_0 в воздухе равна 500 нм, а показатель преломления алмаза 2,42. ***Ответ:*** $\lambda = 207$ нм.

3.307. Оптическая длина пути L световой волны в некоторой среде равна 3 м. Определите показатель преломления n этой среды, если геометрическая длина пути $s = 2$ м ***Ответ:*** $n = 1{,}5$.

3.308. Определите оптическую разность хода Δ двух когерентных монохроматических волн в среде с показателем преломления $n = 1{,}6$, если геометрическая разность хода лучей равна 2 см. ***Ответ:*** $\Delta = 3{,}2$ см.

3.309. Оптическая разность хода Δ двух когерентных волн равна $0{,}25\lambda$. Определите их разность фаз φ. ***Ответ:*** $\varphi = 0{,}5\pi$.

3.310. Две когерентные световые волны ($\lambda = 500$ нм) приходят в некоторую точку пространства с оптической разностью хода $\Delta = 5$ мкм. Наблюдается в данной точке интерференционный максимум или минимум? ***Ответ***: наблюдается интерференционный максимум.

3.311. Две когерентные световые волны ($\lambda = 500$ нм) приходят в некоторую точку пространства с оптической разность хода $\Delta = 3{,}25$ мкм. Наблюдается в данной точке интерференционный максимум или минимум? ***Ответ***: наблюдается интерференционный минимум.

3.312. Два когерентных источника света с $\lambda = 400$ нм находятся на расстоянии $d = 3$ см друг от друга. Экран расположен на расстоянии $l = 4$ см от каждого из источников. Максимум или минимум будет наблюдаться в точке A экрана, расположенной напротив первого источника? ***Ответ***: наблюдается интерференционный максимум.

3.313. Две когерентные световые волны, частота которых $\nu = 5{,}5 \cdot 10^{14}$ Гц, приходят в воде (показатель преломления $n = 1{,}33$) в некоторую точку с геометрической разностью хода $s_2 - s_1 = 1{,}44$ мкм. Наблюдается в данной точке интерференционный максимум или минимум? ***Ответ***: наблюдается интерференционный минимум.

3.314. В опыте Юнга щели (расстояние между щелями $d = 1$ мм) освещаются монохроматическим светом. Определите длину волны λ монохроматического света, если расстояние l от щели до экрана 1,2 м, а третья светлая полоса расположена на расстоянии 2 мм от точки O на экране, симметричной относительно щелей. ***Ответ***: $\lambda = 556$ нм.

3.315. В опыте Юнга щели (расстояние между щелями $d = 1$ мм) освещаются монохроматическим светом. Определите длину волны λ монохроматического света, если расстояние l от щели до экрана 2 м, а вторая темная полоса расположена на расстоянии 2,5 мм от точки O на экране, симметричной относительно щелей. ***Ответ***: $\lambda = 500$ нм.

3.316. Интерференция света от двух когерентных источников света с $\lambda = 500$ нм и расположенных друг от друга на расстоянии $d = 1{,}5$ мм наблюдается на экране, плоскость которого параллельная прямой, которая соединяет эти источники. Определите расстояние l от источника до экрана, если вторая светлая полоса наблюдается на расстоянии $x = 2$ мм от точки O на экране, симметричной относительно щелей. ***Ответ***: $l = 3$ м.

3.317. В опыте Юнга щели (расстояние между щелями $d = 1$ мм) освещаются монохроматическим светом с длиной волны

$\lambda = 500$ гм. Определите положение четвертой светлой полосы x_{4max}, если расстояние l от щели до экрана, расположенного параллельно щелям, составляет 2 м. ***Ответ***: $x_{4max} = 4$ мм.

3.318. В опыте Юнга щели (расстояние между щелями $d = 1$ мм) освещаются монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 556$ нм. Определите положение третьей темной полосы x_{3min} если расстояние l от щели до экрана, расположенного параллельно щелям, составляет 1,2 м. ***Ответ***: $x_{3min} = 2{,}34$ мм.

3.319. На экране в результате наложения лучей от двух когерентных источников ($\lambda = 600$ нм) наблюдается интерференционная картина. На пути одного из лучей перпендикулярно ему поместили стеклянную пластинку ($n = 1{,}6$) толщиной $d = 5$ мкм. Определите, на сколько полос сместится при этом интерференционная картина. ***Ответ***: $k = 5$.

3.320. На экране наблюдается интерференционная картина в результате наложения лучей от двух когерентных источников света с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Если на пути одного из лучей перпендикулярно ему поместить стеклянную пластинку толщиной $d = 8$ мкм, то интерференционная картина смещается на семь полос. Определите показатель преломления n стекла. ***Ответ***: $n = 1{,}5$.

3.321. Определите минимальную толщину d_{min} плоскопараллельной пленки с показателем преломления $n = 1{,}6$, чтобы при падении пучка белого света перпендикулярно к поверхности пленки она в отраженном свете казалась желтой ($\lambda = 600$ нм). ***Ответ***: $d_{min} = 281$ нм.

3.322. На плоскопараллельную пленку с показателем преломления $n = 1{,}33$ под углом $\alpha = 30°$ падает параллельный пучок белого света. Определите, в каком отраженном цвете будет наблюдаться поверхность пленки при минимальной ее толщине $d_{min} = 0{,}38$ мкм. ***Ответ***: $\lambda = 624$ нм.

3.323.* Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм, падающим нормально на плоскую поверхность линзы. Определите толщину воздушного зазора d, образованного плоскопараллельной пластинкой и соприкасающейся с ней плосковыпуклой линзой, в том месте, где в отраженном свете наблюдается третье темное кольцо. ***Ответ***: $d = 750$ нм.

3.324.* Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм, падающим нормально на плоскую поверхность линзы. Определите толщину воздушного зазора d, образованного плоскопараллельной пластинкой и соприкасающейся с ней плосковыпуклой линзой, в том месте, где в отраженном свете наблюдается третье светлое кольцо. ***Ответ***: $d = 0{,}625$ мкм.

3.325.* Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм, падающим нормально на плоскую поверхность линзы. Определите радиус r пятого темного кольца, если радиус кривизны линзы $R = 8$ м и наблюдение ведется в отраженном свете. ***Ответ***: $r = 4{,}9$ мм.

3.326.* Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм, падающим нормально на плоскую поверхность линзы. Определите радиус r третьего светлого кольца, если радиус кривизны линзы $R = 8$ м и наблюдение ведется в отраженном свете. ***Ответ***: $r = 3{,}46$ мм.

3.327.* Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 625$ нм, падающим нормально на плоскую поверхность линзы. Опердосрите разность между радиусами четвертого r_4 и девятого r_9 темных колец, если радиус кривизны линзы $R = 4$ м и наблюдение ведется в отраженном свете. ***Ответ***: $r_9 - r_4 = 1{,}42$ мм.

3.328.* Определите минимальную толщину d_{min} просветляющей пленки ($n = 1{,}26$) для длины волны $\lambda = 550$ нм, если свет падает на стекло (показатель преломления стекла $n_c = 1{,}59$) нормально. ***Ответ***: $d_{min} = 0{,}109$ мкм.

3.329.* Определите показатель преломления n просветляющей пленки, нанесенной на стекло с показателем преломления $n_c = 1{,}7$. ***Ответ***: $n = 1{,}31$.

3.330.* Определите толщину d просветляющей пленки, если ее оптическая толщина составляет 0,4 мкм, а показатель преломления стекла $n_c = 1{,}6$. ***Ответ***: $d = 0{,}316$ мкм.

3.331. Определите число N штрихов дифракционной решетки, если ее длина $l = 5$ см, а период $d = 10$ мкм. ***Ответ***: $N = 5\,000$.

3.332. Монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 580$ нм нормально падает к поверхности дифракционной решетки с периодом $d = 0{,}01$ мм. Определите угол дифракции φ, соответствующий максимуму третьего порядка. ***Ответ***: $\varphi = 10^\circ$.

2.333. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм. Определите период d дифракционной решетки, если максимум третьего порядка наблюдается под углом $\varphi = 7^\circ$. ***Ответ***: $d =$ $= 14{,}8$ мкм.

3.334. Монохроматический свет падает нормально к поверхности дифракционной решетки. Определите угол дифракции φ_1, соответствующий максимуму второго порядка, если максимум пятого порядка отклонен на угол $\varphi_2 = 20°$. ***Ответ***: $\varphi_1 = 7{,}86°$.

3.335. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Определите число максимумов k, наблюдаемых с помощью этой решетки, если ее период $d = 4$ мкм. ***Ответ***: $k \leq 8$.

3.336. На дифракционную решетку с периодом $d = 4{,}7$ мкм нормально к ее поверхности падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 530$ нм. Определите максимальный угол φ_{max} отклонения лучей, который соответствует последнему дифракционному максимуму, наблюдаемому с помощью этой решетки. ***Ответ***: $\varphi_{max} = 64{,}4°$.

3.337. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda_0 = 600$ нм. На экране, расположенном параллельно решетке на расстоянии $L = 1{,}2$ м, максимумы первого порядка отстоят друг от друга на расстоянии $l = 20$ см. Определите период d дифракционной решетки и общее число N максимумов, даваемое этой решеткой. ***Ответ***: $d = 7{,}2$ мкм; $N = 25$.

3.338. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Определите наибольший порядок максимума k_{max}, получаемого с ее помощью, если на $l = 1{,}5$ мм длины решетки приходится $N = 600$ штрихов. ***Ответ***: $k_{max} = 4$.

3.339. Определите число N штрихов на 1 мм длины дифракционной решетки, если при нормальном падении на нее монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм первый дифракционный максимум наблюдается на расстоянии $b = 2$ см от центрального, а расстояние от решетки до экрана $L = 1$ м. ***Ответ***: $N = 40$.

3.340. Естественный свет падает на границу раздела двух сред под углом Брюстера $\alpha_{Бр}$. Докажите, что отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны.

3.341. Естественный пучок света из воздуха падает на поверхность жидкости под углом $\alpha = 55°$. Определите угол преломления γ, если отраженный свет оказался полностью поляризованным. ***Ответ***: $\gamma = 35°$.

3.342. Определите показатель преломления n стекла, если при падении на него естественного света отраженный луч оказывается плоскополяризованным при угле преломления $\gamma = 30°$. ***Ответ***: $n = 1{,}73$.

3.343. Угол Брюстера $\alpha_{Бр}$ при падении естественного света на поверхность некоторого вещества равен 60°. Определите скорость света в этом веществе. ***Ответ***: $v = 1{,}73 \cdot 10^8$ м/с.

3.344. Пучок естественного света падает на стеклянную призму с двугранным углом призмы $\vartheta = 35°$. Определите показатель преломления n стекла, если отраженный пучок является плоскополяризованным. ***Ответ***: $n = 1{,}43$.

3.345. Источник монохроматического света с длиной волны $\lambda_0 = 550$ нм движется к наблюдателю со скоростью $v = 0{,}15c$ вдоль соединяющей их прямой. Определите длину волны λ, которую зарегистрирует спектральный прибор наблюдателя. ***Ответ***: $\lambda = 473$ нм.

3.346. Источник монохроматического света с длиной волны $\lambda_0 = 550$ нм движется от наблюдателя со скоростью $v = 0{,}15c$ вдоль соединяющей их прямой. Определите длину волны λ, которую зарегистрирует спектральный прибор наблюдателя. ***Ответ***: $\lambda = 640$ нм.

3.347. Предполагая, что космический объект удаляется от Земли со скоростью $v = 0{,}01c$, определите доплеровское смещение частоты $\Delta\nu$, воспринимаемой приемником, если частота ν_0 электромагнитных волн, излучаемых антенной объекта, составляет 40 МГц. ***Ответ***: $\Delta\nu = 398$ кГц.

3.348. Определите длину волны λ_0 сплошного рентгеновского спектра, если рентгеновская трубка работает под напряжением $U = 50$ кВ. ***Ответ***: $\lambda_0 = 24{,}9$ пм.

3.349. Длина волны λ_0 границы сплошного рентгеновского спектра, который получен от трубки, работающей при напряжении $U = 80$ кВ, равна 15,5 пм. Определите по этим данным постоянную Планка. ***Ответ***: $h = 6{,}61 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

3.350. Определите длину волны λ_0 границы сплошного рентгеновского спектра, если скорость электронов, бомбардирующих анод рентгеновской трубки, составляет $0{,}7c$. ***Ответ***: $\lambda_0 = 6{,}06$ пм.

3.351. Определите длину волны λ_0 границы сплошного рентгеновского спектра, если при увеличении напряжения на рентгеновской трубке в 1,5 раза она изменилась на 10 пм. ***Ответ***: $\lambda_0 = 30$ пм.

Раздел IV

СТРОЕНИЕ АТОМА И КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

Глава 19

Квантовая оптика

Основные законы и формулы

■ Закон Кирхгофа

$$\frac{R_{\nu,T}}{A_{\nu,T}} = r_{\nu,T}$$

[$R_{\nu,T}$ — спектральная плотность энергетической светимости тела; $A_{\nu,T}$ — спектральная поглощательная способность тела; $r_{\nu,T}$ — спектральная плотность энергетической светимости черного тела].

■ Закон Стефана — Больцмана

$$R_e = \sigma T^4$$

[R_e — энергетическая светимость черного тела; σ — постоянная Стефана — Больцмана ($\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$ К^4); T — термодинамическая температура].

Закон смещения Ви́на

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$$

[$\lambda_{\max}$ — длина волны, соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости черного тела; b — постоянная Ви́на ($b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м·К); T — термодинамическая температура].

■ Энергия кванта (фотона)

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

[h — постоянная Планка; ν — частота; c — скорость распространения света в вакууме; λ — длина волны].

■ Максимальное значение кинетической энергии электронов, вырываемых электромагнитным излучением из катода,

$$\frac{m_e v_{\max}^2}{2} = U_з$$

[m_e — масса электрона ($m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг); e — заряд электрона; $U_з$ — задерживающее напряжение].

■ Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2}$$

[ν — частота падающего фотона; h — постоянная Планка; A — работа выхода электрона из металла; $mv_{\max}^2/2$ — максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона].

■ Красная граница фотоэффекта

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A}; \quad \nu_0 = \frac{A}{h}$$

[λ_0 — максимальная длина волны излучения (ν_0 — соответственно минимальная частота), при которой фотоэффект еще возможен; A — работа выхода электрона из металла].

■ импульс фотона

$$p = \frac{h\nu}{c}$$

[$h\nu$ — энергия фотона].

■ Давление, производимое светом при нормальном падении на поверхность,

$$p = \frac{Nh\nu}{c}(1+\rho) = w(1+\rho)$$

[$Nh\nu$ — энергия всех фотонов, падающих на 1 м^2 поверхности за 1 с; ρ — коэффициент отражения; w — объемная плотность энергии излучения].

■ Изменение длины волны излучения при комптоновском рассеянии (*комптоновский сдвиг*)

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 2\lambda_C \sin^2\frac{\theta}{2}$$

[λ_0 и λ — соответственно длина волны падающего и рассеянного излучения; θ — угол рассеяния; λ_C = 2,43 пм — комптоновская длина волны].

Примеры решения задач

1 При остывании черного тела длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости, сместилась с $\lambda_{max1} = 0{,}9$ мкм до $\lambda_{max2} = 2{,}7$ мкм. Определите, во сколько раз изменилась энергетическая светимость R_{e2}/R_{e1} тела.

Дано: $\lambda_{max1} = 0{,}9$ мкм $= 0{,}9 \cdot 10^{-6}$ м; $\lambda_{max2} = 2{,}7$ мкм $= 2{,}7 \cdot 10^{-6}$ м.

Найти: R_{e2}/R_{e1}.

Решение. Энергетическая светимость черного тела, согласно закону Стефана — Больцмана,

$$R_e = \sigma T^4, \tag{1}$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$К^4) — постоянная Стефана — Больцмана; T — термодинамическая температура.

Согласно закону смещения Ви́на, длина волны, отвечающая максимуму спектральной плотности энергетической светимости черного тела,

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T},$$

где $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м$\cdot$К — постоянная Ви́на. Тогда

$$T_1 = \frac{b}{\lambda_{max_1}} \text{ и } T_2 = \frac{b}{\lambda_{max_2}}. \tag{2}$$

Искомое отношение энергетических светимостей с учетом выражений (1) и (2) имеет вид

$$\boxed{\frac{R_{e2}}{R_{e1}} = \frac{T_2^4}{T_1^4} = \left(\frac{\lambda_{max_1}}{\lambda_{max_2}}\right)^4}$$

Ответ: уменьшилась в 81 раз.

2 Определите длину волны λ фотона, импульс которого равен импульсу электрона, движущегося со скоростью $\upsilon = 0{,}1$ Мм/с.

Дано: $p = p_e$; $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг; $\upsilon = 0{,}1$ Мм/с $= 10^5$ м/с.

Найти: λ.

Решение. Импульс фотона

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}, \tag{1}$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с — постоянная Планка.

Импульс электрона

$$p_e = m_e v. \qquad (2)$$

Согласно условию задачи,

$$p = p_e. \qquad (3)$$

Подставив (1) и (2) в формулу (3), найдем

$$\frac{h}{\lambda} = m_e v,$$

откуда искомая длина волны фотона

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{m_e v}}$$

$$[\lambda] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot\text{м/с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Н}} = \text{м}.$$

Ответ: $\lambda = 7{,}28$ нм.

3 Натрий освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Определите максимальную скорость v_{max} фотоэлектронов, зная, что красная граница фотоэффекта для натрия $\lambda_0 = 584$ нм.

Дано: $\lambda = 500$ нм $= 5\cdot10^{-7}$ м; $\lambda_0 = 584$ нм $= 5{,}84\cdot10^{-7}$ м.

Найти: v_{max}.

Решение. Согласно уравнению Эйнштейна,

$$h\nu = A + \frac{m_e v_{max}^2}{2}, \qquad (1)$$

где $m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг — масса электрона.

Работа выхода электрона из металла

$$A = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}, \qquad (2)$$

где $h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка; $c = 3\cdot10^8$ м/с — скорость распространения света в вакууме.

Подставив (2) в (1) и учитывая, что $\nu = \frac{c}{\lambda}$, получаем

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0} + \frac{m_e v_{max}^2}{2},$$

откуда искомая максимальная скорость фотоэлектрона

$$\boxed{v_{max} = \sqrt{\frac{2hc}{m_e}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)}}$$

$$\left[\upsilon_{max}\right] = \sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м/с}}{\text{кг} \cdot \text{м}}} = \sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}/(\text{с}^2) \cdot \text{м}}{\text{кг}}} = \text{м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_{max} = 354$ км/с.

4 На идеально отражающую поверхность нормально падает монохроматический свет. Сила давления F, испытываемая этой поверхностью, равна 1 мкН. Определите поток излучения Ф.

Дано: $\rho = 1$; $F = 1$ мкН $= 10^{-6}$ Н.

Найти: Ф.

Решение. Поток излучения

$$\Phi = \frac{W}{t}, \tag{1}$$

где W — энергия света, падающего на поверхность тела за время t. Согласно формуле для давления света,

$$p = \frac{Nh\nu}{c}(1+\rho), \tag{2}$$

где $Nh\nu$ — энергия всех фотонов, падающих на 1 м^2 поверхности за 1 с, т. е.

$$Nh\nu = \frac{W}{St} = \frac{\Phi}{S}, \tag{3}$$

где S — площадь поверхности тела.

Учитывая, что давление, производимое светом,

$$p = \frac{F}{S}, \tag{4}$$

и подставив выражения (3) и (4) в формулу (2), запишем

$$\frac{F}{S} = \frac{\Phi}{Sc}(1+\rho),$$

откуда искомый поток излучения

$$\boxed{\Phi = \frac{cF}{1+\rho}}$$

$$\left[\Phi\right] = \text{м/(с)} \cdot \text{Н} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}.$$

Ответ: Ф = 150 Вт.

5 Определите энергию электрона отдачи при эффекте Комптона, если фотон ($\lambda = 50$ пм) рассеялся на угол $\theta = 120°$.

Дано: $\lambda = 50$ пм $= 5 \cdot 10^{-11}$ м; $\theta = 120°$.

Найти: E.

Решение. Энергия электрона отдачи равна разности энергий падающего ε и рассеянного ε' фотонов

$$E = \varepsilon - \varepsilon', \qquad (1)$$

причем

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \qquad (2)$$

и

$$\varepsilon' = h\nu' = \frac{hc}{\lambda'}, \qquad (3)$$

где λ и λ' — соответственно длины волн падающего и рассеянного фотонов; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме.

Подставляя выражения (2) и (3) в формулу (1), имеем

$$E = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda\lambda'}, \qquad (4)$$

где $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ — изменение длины волны фотона в результате рассеяния на свободном электроне;

$$\Delta\lambda = 2\lambda_C \sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad (5)$$

где $\lambda_C = 2{,}43$ пм — комптоновская длина волны; θ — угол рассеяния.

Искомую энергию электрона отдачи найдем, подставив формулу (5) в выражение (4):

$$\boxed{E = \frac{2hc\lambda_C \sin^2\frac{\theta}{2}}{\lambda\left(\lambda' + 2\lambda_C \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}}$$

$$[E] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м/(с)} \cdot \text{м}}{\text{м}^2} = \text{Дж}.$$

Ответ: $E = 2{,}71 \cdot 10^{-16}$ Дж $= 1{,}69$ кВ.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Энергетическая светимость черного тела $R_e = 10$ кВт/м^2. Определите термодинамическую температуру T этого тела. ***Ответ***: $T = 648$ К.

4.2. Термодинамическую температуру T черного тела увеличили в четыре раза. Определите, во сколько раз изменилась его энергетическая светимость R_e. ***Ответ***: увеличилась в 256 раз.

4.3. Определите, во сколько раз следует уменьшить термодинамическую температуру T черного тела, чтобы его энергетическая светимость R_e ослабилась в 10 раз. ***Ответ***: в 1,78 раза.

4.4. Определите, на какую длину волны λ_{max} приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости черного тела при температуре $t = 17$ °С. ***Ответ***: $\lambda_{max} = 10$ мкм.

4.5. Черное тело нагрели от температуры $T_1 = 500$ К до $T_2 = 2\,000$ К. Определите, как изменилась длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости. ***Ответ***: уменьшилась на 4,35 мкм.

4.6. При остывании черного тела, первоначальная термодинамическая температура которого составляла $T_1 = 1$ кК, длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости, сместилась на $\Delta\lambda_{max} = 4$ мкм. Определите температуру T_2, до которой охладилось черное тело. ***Ответ***: $T_2 = 420$ К.

4.7. При нагревании черного тела длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости, сместилась с $\lambda_{max1} = 2,4$ мкм до $\lambda_{max2} = 1,2$ мкм. Определите, во сколько раз изменилась энергетическая светимость тела. ***Ответ***: увеличилась в 16 раз.

4.8. Энергетическая светимость черного тела $R_e = 5$ кВт/м^2. Определите длину волны λ_{max}, соответствующую максимуму энергетической светимости этого тела. ***Ответ***: $\lambda_{max} = 5,32$ мкм.

4.9. Определите длину волны λ фотона, энергия которого равна средней кинетической энергии теплового движения молекул одноатомного газа при термодинамической температуре $T = 290$ К. ***Ответ***: $\lambda = 33,1$ мкм.

4.10. Определите абсолютный показатель преломления n среды, в которой свет с энергией фотона $\varepsilon = 2,26 \cdot 10^{-19}$ Дж имеет длину волны $\lambda = 500$ нм. ***Ответ***: $n = 1,6$.

4.11. С какой скоростью υ должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия была равна энергии фотона, которому соответствует длина воны $\lambda = 0,6$ мкм? ***Ответ***: $\upsilon = 853$ км/с.

4.12. Определите длину волны λ фотона с энергией, равной энергии, которую приобретает электрон, прошедший разность потенциалов $U = 10$ В. ***Ответ***: $\lambda = 124$ нм.

4.13. Определите число N фотонов, испускаемых электрической лампочкой за время $t = 1$ мин, если ее полезная мощность $P = 100$ Вт, а длина волны излучения $\lambda = 600$ нгм. ***Ответ***: $N = 1{,}81 \cdot 10^{22}$.

4.14. Определите длину волны λ фотона, импульс которого $p = 1{,}2 \cdot 10^{-27}$ Н·с. ***Ответ***: $\lambda = 0{,}55$ мкм.

4.15. Определите длину волны λ фотона, импульс которого в два раза больше импульса электрона, движущегося со скоростью $v = 60$ км/с. ***Ответ***: $\lambda = 6{,}06$ нм.

4.16. Определите ускоряющую разность потенциалов U, необходимую для того, чтобы импульс электрона был равен импульсу фотона с длиной волны $\lambda = 100$ нм. ***Ответ***: $U = 0{,}51$ мВ.

4.17. Определите работу выхода A электронов из платины, если красная граница фотоэффекта $\lambda_0 = 197$ нм. ***Ответ***: $A = 6{,}31$ эВ.

4.18. Определите красную границу фотоэффекта для металла с работой выхода 2,5 эВ. ***Ответ***: $\lambda_0 = 497$ нм.

4.19. Определите частоту ν света, вырывающего из металла электроны, если задерживающее напряжение $U_з$ составляет 3 В, а фотоэффект у этого металла начинается при частоте падающего света $\nu_0 = 6 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$. ***Ответ***: $\nu = 1{,}32 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$.

4.20. Определите максимальную кинетическую энергию E_{max} электронов, вылетающих из металла с работой выхода $A = 2{,}3$ эВ при облучении его фотонами с энергией $\varepsilon = 2{,}5$ эВ. ***Ответ***: $E_{max} = 3{,}2 \cdot 10^{-20}$ Дж.

4.21. Задерживающее напряжение $U_{з1}$ для серебряной пластинки (работа выхода $A_1 = 4{,}7$ эВ) составляет 5,3 В. При тех же условиях для платиновой пластинки задерживающее напряжение $U_{з2} = 3{,}7$ В. Определите работу выхода A_2 электронов из платины. ***Ответ***: $A_2 = 6{,}3$ эВ.

4.22. Определите максимальную скорость v_{max} фотоэлектронов, вырываемых из металла с работой выхода $A = 2{,}5$ эВ при освещении его светом с длиной волны $\lambda = 400$ нм. ***Ответ***: $v_{max} = 462$ км/с.

4.23. Некоторый металл, работа выхода A электронов из которого равна 4,7 эВ, освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 200$ нм. Определите напряжение $U_з$, при котором фотоэффект прекратится. ***Ответ***: $U_з = 1{,}52$ В.

4.24. Фотоны с энергией $\varepsilon = 4{,}3$ эВ вырывают фотоэлектроны из металла с работой выхода $A = 4$ эВ. Определите максимальный импульс p_{max}, передаваемый поверхности этого металла при вылете электрона. ***Ответ***: $p_{max} = 2{,}96 \cdot 10^{-25}$ кг·м/с.

4.25. Натрий освещается монохроматическим излучением $\lambda = 100$ нм. Определите наименьшее задерживающее напряжение $U_з$, при котором фототок прекратится. Красная граница фотоэффекта для натрия $\lambda_0 = 584$ нм. ***Ответ***: $U_з = 10{,}3$ В.

4.26. Определите, во сколько раз максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов, вырываемых с поверхности некоторого металла (работа выхода $A = 2{,}5$ эВ) монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 400$ нм, превосходит среднюю энергию движения электронов при температуре $t = 27\,°C$. ***Ответ***: в 15,7 раза.

4.27. На зачерненную поверхность площадью $S = 10$ см^2 за время $t = 2$ мин нормально падает монохроматический свет, энергия которого $W = 5$ Дж. Определите световое давление p. оказываемое на поверхность. ***Ответ***: $p = 139$ нПа.

4.28. На идеально отражающую поверхность за время $t = 5$ мин нормально падает монохроматический свет, энергия которого $W = 1$ Дж. Определите площадь S этой поверхности, если световое давление p, оказываемое на нее, равно 0,1 мкПа. ***Ответ***: $S = 2{,}22$ см^2.

4.29. На идеально отражающую поверхность нормально падает монохроматический свет. Определите объемную плотность энергии w падающего света, если давление света на поверхность $p = 0{,}3$ мкПа. ***Ответ***: $w = 0{,}15$ мкДж/м^3.

4.30. На идеально отражающую поверхность нормально падает монохроматический свет. Определите силу давления F, испытываемую этой поверхностью, если поток излучения $\Phi = 75$ Вт. ***Ответ***: $F = 0{,}5$ мкН.

4.31. Давление p монохроматического света с длиной волны $\lambda = 550$ нм на идеально отражающую поверхность, расположенную перпендикулярно падающему излучению, равно 0,1 мкПа. Определите число фотонов N, падающих на поверхность площадью $S = 5$ см^2 за время $t = 2$ с. ***Ответ***: $N = 4{,}15 \cdot 10^{16}$.

4.32. Фотон испытал комптоновское рассеяние под углом $\theta = 120°$ на первоначально покоившемся свободном электроне. Определите изменение длины волны $\Delta\lambda$ при рассеянии. ***Ответ***: $\Delta\lambda = 3{,}65$ пм.

4.33. Фотон с длиной волны $\lambda = 5$ пм испытал комптоновское рассеяние под углом $\theta = 90°$ на первоначально покоившемся свободном электроне. Определите длину волны λ' рассеянного фотона. ***Ответ***: $\lambda' = 7{,}43$ пм.

4.34. Фотон с энергией $\varepsilon = 0{,}2$ МэВ рассеялся под углом $\theta = 180^\circ$ на первоначально покоившемся свободном электроне. Определите длину волны λ' рассеянного фотона. ***Ответ***: $\lambda' = 11{,}1$ пм.

4.35. Фотон с энергией $\varepsilon = 0{,}25$ МэВ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Определите угол рассеяния θ, если энергия ε' рассеянного фотона оказалась равной 0,2 МэВ. ***Ответ***: $\theta = 60{,}8^\circ$.

4.36. Определите энергию E электрона отдачи при эффекте Комптона, если фотон ($\lambda = 100$ пм) рассеялся на угол $\theta = 90^\circ$. ***Ответ***: $E = 4{,}72 \cdot 10^{-17}$ Дж (295 эВ).

Глава 20

Элементы физики атома

Основные законы и формулы

■ Обобщенная формула Бальмера, описывающая серии в спектре излучения атома водорода:

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

[λ — длина волны спектральных линий в спектре атома водорода; $R = 1{,}1\cdot 10^7$ м$^{-1}$ — постоянная Ридберга; m определяет серию (m = 1, 2, 3, ...); n определяет отдельные линии соответствующей серии ($n = m + 1$, $m + 2$, ...); m = 1 (серия Лаймана), m = 2 (серия Бальмера), m = 3 (серия Пашена) и т. д.].

■ Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний)

$$m_e v_n r_n = n\hbar \; (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

[m_e — масса электрона ($m_e = 9{,}11\cdot 10^{-31}$ кг); v_n — скорость электрона на n-й орбите радиусом r_n; $\hbar$ — постоянная Планка ($\hbar = h/(2\pi) = 1{,}05\cdot 10^{-34}$ Дж·с)].

■ Второй постулат Бора (правило частот)

$$h\nu = E_n - E_m$$

[E_n и E_m — энергия стационарных состояний атома соответственно до и после излучения (поглощения)].

■ Радиус n-й стационарной орбиты в боровской модели атома водорода

$$r_n = n^2\frac{\hbar^2\cdot 4\pi\varepsilon_0}{m_e e^2} \; (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

[$\hbar$ — постоянная Планка; ε_0 — электрическая постоянная ($\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м); m_e — масса электрона; e — элементарный заряд ($e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл)].

■ Первый боровский радиус

$$r_1 = a = \frac{\hbar^2\cdot 4\pi\varepsilon_0}{m_e e^2} = 52{,}8 \text{ пм.}$$

■ Энергия электрона в атоме водорода по Бору

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

■ Формула де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

[λ — дебройлевская длина волны; p — импульс частицы; h — постоянная Планка ($h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с)].

Примеры решения задач

1 Определите частоту ν света, излучаемого возбужденным атомом водорода при переходе электрона на первый энергетический уровень, если радиус орбиты электрона r изменился в четыре раза.

Дано: $m = 1$; $\frac{r_n}{r_1} = 4$.

Найти: ν.

Решение. Согласно обобщенной формуле Бальмера, длина волны света, излучаемого атомом водорода,

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{1}$$

где $R = 1{,}1 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ — постоянная Ридберга; m определяет серию (по условию задачи $m = 1$ — *серия Лаймана*), т.е. номер орбиты, на которую переходит электрон; n определяет отдельную линию серии, т.е. номер орбиты, с которой переходит электрон.

Учитывая, что

$$\lambda = \frac{c}{\nu},$$

формулу (1) можно записать в виде

$$\nu = Rc\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{2}$$

Для электрона, движущегося по окружности радиусом r_n под действием кулоновской силы,

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2} = \frac{m_e v_n^2}{r_n}. \tag{3}$$

Согласно теории Бора, момент импульса электрона, движущегося по n-й орбите,

$$m_e v_n r_n = n\hbar \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ ...). \qquad (4)$$

Решая уравнения (3) и (4), получаем

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0}{m_e e^2}. \qquad (5)$$

Из выражения (5) и условия задачи следует, что

$$\frac{r_n}{r_1} = \frac{n^2}{m^2} = 4. \qquad (6)$$

Умножив и разделив правую часть уравнения (2) на m^2 и учитывая (6), найдем искомую частоту света

$$\nu = Rc\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right)\frac{1}{m^2} = Rc\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}Rc.$$

$$\boxed{\nu = \frac{3}{4}Rc}$$

$$[\nu] = \text{м}^{-1} \cdot \text{м/с} = \text{с}^{-1}.$$

Ответ: $\nu = 2{,}48 \cdot 10^{15}\ \text{с}^{-1}$.

2 Определив энергию ионизации E_i атома водорода, найдите в электронвольтах энергию фотона $E_{\lambda\max}$, соответствующую самой длинноволновой линии серии Лаймана.

Дано: $m = 1$.

Найти: E_i; $E_{\lambda\max}$.

Решение. Энергия ионизации атома (энергия, которая необходима для отрыва электрона, находящегося в основном состоянии, от атома) определяется уравнением

$$E_i = h\nu = hRc\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

[учли, что $\nu = \frac{c}{\lambda}$ и $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$], где $R = 1{,}1 \cdot 10^7\ \text{м}^{-1}$ — постоянная Ридберга; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость распространения света в вакууме; $m = 1$ и $n = \infty$. Тогда энергия ионизации атома водорода

$$\boxed{E_i = hRc} \qquad (1)$$

Самая длинноволновая линия серии Лаймана соответствует переходу электрона со второго энергетического уровня на основной, т. е.

$$R_{\lambda_{\max}} = E_{21} = h\nu_{21} = hRc\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}hRc.$$

Учитывая (1), находим искомую энергию фотона, соответствующую самой длинноволновой линии серии Лаймана:

$$\boxed{E_{\lambda_{max}} = \frac{3}{4}E_i}$$

$$[E_i] = \text{Дж}\cdot\text{с}\cdot\text{м}^{-1}/\text{с} = \text{Дж};\ 1\ \text{эВ} = 1{,}6\cdot10^{-19}\ \text{Дж}.$$

Ответ: $E_i = 21{,}9\cdot10^{-19}$ Дж $\approx 13{,}7$ эВ; $E_{\lambda max} = 10{,}3$ эВ.

3 Определите длину волны λ фотона, излучаемого атомом водорода, если энергия электрона изменилась на 3,38 эВ.

Дано: $\Delta E = 3{,}38$ эВ $= 3{,}38\cdot1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж.

Найти: λ.

Решение. Согласно второму постулату Бора, при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую излучается фотон с энергией, равной разности энергий соответствующих стационарных состояний:

$$h\nu = E_n - E_m,$$

где E_n и E_m — соответственно энергия стационарного состояния электрона до и после излучения.

Согласно условию задачи,

$$\Delta E = E_n - E_m,$$

поэтому

$$\Delta E = h\nu. \quad (1)$$

Учитывая, что $\nu = \frac{hc}{\lambda}$, выражение (1) запишем в виде

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda},$$

откуда искомая длина волны

$$\boxed{\lambda = \frac{hc}{\Delta E}}$$

$$[\lambda] = \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}\cdot\text{м/с}}{\text{Дж}} = \text{м}.$$

Ответ: $\lambda = 368$ нм.

4 Сравните длины волн де Бройля нерелятивистских электрона λ_e и протона λ_p, прошедших одинаковую разность потенциалов.

Дано: $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $v \ll c$; $U_1 = U_2 = U$.

Найти: $\dfrac{\lambda_e}{\lambda_p}$.

Решение. Длина волны де Бройля зависит от ее импульса p:

$$\lambda = \frac{h}{p}, \qquad (1)$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка.

Связь кинетической энергии и импульса p частицы, движущейся с $v \ll c$,

$$E_к = \frac{p^2}{2m},$$

откуда

$$p = \sqrt{2mE_к}. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия электрона и протона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U (по условию задачи она в обоих случаях одинакова),

$$E_к = eU. \qquad (3)$$

Подставив (2) в формулу (1) и учитывая (4), получим выражение для длины волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}.$$

Тогда искомое отношение имеет вид

$$\boxed{\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}}}$$

Ответ: $\dfrac{\lambda_e}{\lambda_p} = 42{,}8.$

Задачи для самостоятельного решения

4.37. Определите длину волны λ фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода со второго энергетического уровня на первый. ***Ответ***: $\lambda = 121$ нм.

4.38. Определите длину волны λ фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с пятого энергетического уровня на второй. ***Ответ***: $\lambda = 433$ нм.

4.39. Определите длину волны λ, соответствующую границе серии Бальмера в спектре атома водорода. ***Ответ***: $\lambda = 364$ нм.

4.40. Определите длину волны λ фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на второй. ***Ответ***: $\lambda = 655$ нм.

4.41. Определите длину волны λ, соответствующую границе серии Лаймана в спектре атома водорода. ***Ответ***: $\lambda = 90{,}9$ нм.

4.42. Определите энергию E фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода со второго энергетического уровня на первый. ***Ответ***: $E = 10{,}3$ эВ.

4.43. Определите минимальную E_{min} и максимальную E_{max} энергии фотона в серии Лаймана спектра атома водорода. ***Ответ***: $E_{min} = 10{,}3$ эВ; $E_{max} = 13{,}6$ эВ.

4.44. Определив энергию ионизации атома водорода, найдите в электронвольтах энергию фотона, соответствующую головной линии серии Бальмера. ***Ответ***: $E = 1{,}89$ эВ.

4.45. Определите длину воны λ фотона, излучаемого атомом водорода, если энергия ΔE электрона изменилась на 12,1 эВ. ***Ответ***: $\lambda = 103$ нм.

4.46. Определите, на сколько изменилась энергия ΔE электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны $\lambda = 97$ нм. ***Ответ***: $\Delta E = 12{,}8$ эВ.

4.47. Используя теорию Бора, определите радиус второй орбиты r_2 в атоме водорода. ***Ответ***: $r_2 = 210$ пм.

4.48. Определите скорость v_1 электрона на первой орбите атома водорода. ***Ответ***: $v_1 = 2{,}19$ Мм/с.

4.49. Определите, согласно теории Бора, частоту f вращения электрона по второй орбите атома водорода. ***Ответ***: $f = 2{,}6 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$.

4.50. Определите, на сколько отличается кинетическая энергия электрона на второй боровской орбите от его кинетической энергии на первой боровской орбите. Радиус первой боровской орбиты $r_1 = 52{,}8$ пм. ***Ответ***: на $1{,}64 \cdot 10^{-19}$ Дж.

4.51. Найдите выражение для полной энергии E электрона в атоме водорода. ***Ответ***: $E = -\frac{1}{n^2}\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}$.

4.52. Пользуясь теорией Бора, определите числовое значение постоянной Ридберга. ***Ответ***: $R = 1{,}09 \cdot 10^7$ м$^{-1}$.

4.53. Определите, во сколько раз изменился радиус орбиты электрона, если частота ν света, излучаемого атомом водорода, при переходе электрона на первый энергетический уровень составляет $2{,}475 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$. ***Ответ***: в 4 раза.

4.54. Определите импульс p частицы, дебройлевская длина волны λ для которой равна 100 пм. ***Ответ***: $p = 6{,}63 \cdot 10^{-24}$ кг·м/с.

4.55. Определите длину волны λ де Бройля для электрона, кинетическая энергия $E_к$ которого равна 500 эВ. ***Ответ***: $\lambda = 54{,}9$ пм.

4.56. Определите длину волны λ де Бройля для протона ($m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг), обладающего кинетической энергией $E_к = 100$ эВ. ***Ответ***: $\lambda = 2{,}87$ пм.

4.56. Определите, какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы длина волны λ де Бройля составляла 150 нм. ***Ответ***: $U = 67$ В.

4.58. Определите длину волны λ де Бройля для протона, движущегося со средней квадратичной скоростью $\langle v_{кв} \rangle$ при $T = 300$ К. ***Ответ***: $\lambda = 146$ пм.

4.59. Определите длину волны λ де Бройля для электрона в атоме водорода, движущегося по первой боровской орбите. ***Ответ***: $\lambda = 334$ пм.

Глава 21

Элементы физики атомного ядра

Основные законы и формулы

■ Закон радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

[N — число нераспавшихся ядер в момент времени t; N_0 — начальное число нераспавшихся ядер (в момент времени $t = 0$); λ — постоянная радиоактивного распада].

■ Число ядер, распавшихся за время t,

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t}).$$

■ Связь периода полураспада T и постоянной радиоактивного распада λ

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

■ Связь среднего времени жизни τ радиоактивного ядра и постоянной λ радиоактивного распада

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

■* Активность радиоактивного распада

$$A = \left|\frac{dN}{dt}\right|.$$

■ Энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{св} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_я]c^2 = [Zm_H + (A - Z)m_я - m]c^2$$

[m_p, m_n, $m_я$ — соответственно масса протона, нейтрона и ядра; Z — зарядовое число; A — массовое число; $m_H = m_p + m_e$ — масса атома водорода (^1_1H); m — масса атома].

■ Дефект массы ядра

$$\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_я = [Zm_H + (A - Z)m_n] - m.$$

[m_p, m_n, $m_я$ — соответственно массы протона, нейтрона и ядра; Z — зарядовое число; $m_H = m_p + m_e$ — масса атома водорода (^1_1H); m — масса атома; A — массовое число].

■ Удельная энергия связи

$$\delta E_{св} = \frac{E_{св}}{A}$$

[A — массовое число (число нуклонов в ядре)].

■ Правила смещения:

• *для α-распада*

$$^{A}_{Z}X \to {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He;$$

• *для β-распада*

$$^{A}_{Z}X \to {}_{Z+1}^{A}Y + {}_{-1}^{0}e.$$

■ Символическая запись ядерной реакции

$$^{A}_{Z}X + a \to {}^{A'}_{Z'}Y + b$$

[$^{A}_{Z}X$ и $^{A'}_{Z'}Y$ — исходное и конечное ядра соответственно с зарядовыми числами Z и Z' и массовыми числами A и A'; a и b — соответственно бомбардирующая и испускаемая (или испускаемые) в ядерной реакции частицы].

Примеры решения задач

1 Определите период полураспада T радиоактивного изотопа, если 2/3 начального количества ядер этого изотопа распалось за время t = 10 мин.

Дано: t = 10 мин = 600 с; $\frac{\Delta N}{N_0} = \frac{2}{3}$.

Найти: T.

Решение. Период полураспада радиоактивного изотопа

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}, \quad (1)$$

где λ — постоянная радиоактивного изотопа.

Число распавшихся за время t ядер

$$\Delta N = N_0 - N, \quad (2)$$

где N_0 — начальное число нераспавшихся ядер (в момент времени $t = 0$); N — число нераспавшихся ядер в момент времени t, которое, согласно закону радиоактивного распада,

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (3)$$

Учитывая выражения (2) и (3), найдем долю распавшихся ядер за время t

$$\frac{\Delta N}{N_0} = \frac{N_0 N}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Согласно условию задачи,

$$\frac{\Delta N}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t} = \frac{2}{3};$$

$$e^{-\lambda t} = \frac{1}{3}, \quad -\lambda t = \ln\frac{1}{3},$$

откуда

$$\lambda = \frac{\ln 3}{t}.$$

Подставив значение λ в формулу (1), найдем искомый период полураспада радиоактивного изотопа

$$\boxed{T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{\ln 3} t}$$

Ответ: $T = 6{,}31$ мин.

2* Докажите, что активность радиоактивного изотопа изменяется со временем по тому же закону, что и число нераспавшихся ядер.

Решение. Активность изотопа

$$A = \left|\frac{dN}{dt}\right|,$$

где dN — число ядер, распавшихся в изотопе за промежуток времени dt.

Согласно закону радиоактивного распада,

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N_0 — число нераспавшихся ядер в момент времени $t = 0$; N — число нераспавшихся ядер в момент времени t; λ — постоянная радиоактивного распада.

Тогда

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

Активность изотопа в начальный момент времени

$$A_0 = \lambda N_0$$

и

$$\boxed{A = A_0 e^{-\lambda t}}$$

что и требовалось доказать.

3 При бомбардировке изотопа лития $^6_3\mathrm{Li}$ дейтронами $^2_1\mathrm{H}$ ($m_{^2_1\mathrm{H}} = 3{,}3446 \cdot 10^{-27}$ кг) образуются две α-частицы $^4_2\mathrm{He}$ ($m_{^4_2\mathrm{He}} =$ $= 6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг) и выделяется энергия $\Delta E = 22{,}3$ Мэв. Определите массу изотопа лития.

Дано: $^6_3\mathrm{Li} + {}^2_1\mathrm{H} \to 2\,^4_2\mathrm{He} + \Delta E$; $\Delta E = 22{,}3$ МэВ $= 35{,}68 \cdot 10^{-13}$ Дж; $m_{^4_2\mathrm{He}} = 6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг; $m_{^2_1\mathrm{H}} = 3{,}3446 \cdot 10^{-27}$ кг.

Найти: $m_{^6_3\mathrm{Li}}$.

Решение. Дефект массы ядра

$$\Delta m = m_{^6_3\mathrm{Li}} + m_{^2_1\mathrm{H}} - 2m_{^4_2\mathrm{He}}. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$\Delta m = \Delta E / c^2, \qquad (2)$$

тогда из выражений (1) и (2) можно найти искомую массу изотопа лития

$$\boxed{m_{^6_3\mathrm{Li}} = \frac{\Delta E}{c^2} + 2m_{^4_2\mathrm{He}} - m_{^2_1\mathrm{H}}}$$

Ответ: $m_{^6_3\mathrm{Li}} = 9{,}9884 \cdot 10^{-27}$ кг.

4 Определите, пользуясь Периодической системой элементов, в какой элемент $^A_Z\mathrm{X}$ превращается $^{238}_{92}\mathrm{U}$ после шести α- и трех β-распадов.

Дано: $^{238}_{92}\mathrm{U}$; 6 α-распадов; 3 β-распада.

Найти: $^A_Z\mathrm{X}$.

Решение. α- и β-распады протекают соответственно по следующему правилу смещения:

$$^A_Z\mathrm{X} \xrightarrow{\alpha} {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^4_2\mathrm{He},$$

$$^A_Z\mathrm{X} \xrightarrow{\beta} {}_{Z+1}^{A}\mathrm{Y} + {}^{0}_{-1}e,$$

т. е. в результате α-распада массовое число дочернего ядра уменьшается на 4, а зарядовое число — на 2 единицы; в результате β-распада массовое число дочернего ядра не изменяется, а зарядовое число увеличивается на единицу.

Общая схема распада:

$$\underset{\text{уран}}{^{238}_{92}\mathrm{U}} \xrightarrow{\alpha} \underset{\text{торий}}{^{229}_{90}\mathrm{Th}} \xrightarrow{\alpha} \underset{\text{радий}}{^{225}_{88}\mathrm{Ra}} \xrightarrow{\alpha} \underset{\text{радон}}{^{221}_{86}\mathrm{Rn}} \xrightarrow{\alpha} \underset{\text{полоний}}{^{217}_{84}\mathrm{Po}} \xrightarrow{\alpha}$$

$$\xrightarrow{\alpha} \underset{\text{свинец}}{^{213}_{82}\mathrm{Pb}} \xrightarrow{\alpha} \underset{\text{ртуть}}{^{209}_{80}\mathrm{Hg}} \xrightarrow{\beta} \underset{\text{таллий}}{^{209}_{81}\mathrm{Tl}} \xrightarrow{\beta} \underset{\text{свинец}}{^{209}_{82}\mathrm{Pb}} \xrightarrow{\beta} \underset{\text{висмут}}{^{209}_{83}\mathrm{Bi}}$$

Ответ: $^{209}_{83}\mathrm{Bi}$.

5 В результате соударения дейтрона ${}^2_1\mathrm{H}$ с ядром бериллия ${}^9_4\mathrm{Be}$ образовались новое ядро и нейтрон. Определите порядковый номер (зарядовое число Z) и массовое число A образовавшегося ядра, запишите ядерную реакцию и определите ее энергетический эффект Q.

Дано: ${}^9_4\mathrm{Be}+{}^2_1\mathrm{H} \to {}^A_Z\mathrm{X}+{}^1_0n$.

Найти: Z; A; Q.

Решение. Из законов сохранения зарядовых и массовых чисел следует, что $Z = 5$, а $A = 10$, т.е. образовавшееся в результате ядерной реакции ядро — изотоп бора ${}^{10}_5\mathrm{B}$. Поэтому ядерную реакцию запишем в виде

$$ {}^9_4\mathrm{Be}+{}^2_1\mathrm{H} \to {}^{10}_5\mathrm{B}+{}^1_0n. $$

Энергетический эффект ядерной реакции

$$ Q = c^2\left[(m_{{}^9_4\mathrm{Be}} + m_{{}^2_1\mathrm{H}}) - (m_{{}^{10}_5\mathrm{B}} + m_n)\right], \tag{1} $$

где в первых круглых скобках указаны массы исходных ядер, во вторых — массы ядер продуктов реакции.

При расчетах вместо масс ядер используют массы нейтральных атомов, так как, согласно закону сохранения зарядовых чисел, в ядерной реакции (зарядовое число Z нейтрального атома равно числу электронов в его оболочке) получаются одинаковые результаты.

Массы нейтральных атомов в выражении (1)

$$ m_{{}^9_4\mathrm{Be}} = 1{,}4966\cdot 10^{-26}\,\text{кг},\ m_{{}^2_1\mathrm{H}} = 3{,}3446\cdot 10^{-27}\,\text{кг}, $$

$$ m_{{}^{10}_5\mathrm{B}} = 1{,}6627\cdot 10^{-26}\,\text{кг},\ m_n = 1{,}675\cdot 10^{-27}\ \text{кг}. $$

Вычисляя, получаем $Q = 4{,}84$ МэВ; энергетический эффект положителен $\Rightarrow$ реакция экзотермическая.

Ответ: $Z = 5$; $A = 10$; $Q = 4{,}84$ МэВ.

Задачи для самостоятельного решения

4.60. Определите долю нераспавшихся ядер радиоактивного изотопа за время $t = 1$ мин, если постоянная радиоактивного распада $\lambda = 0{,}01\ \text{с}^{-1}$. ***Ответ***: $N/N_0 = 0{,}549$.

4.61. Определите период T полураспада радиоактивного ядра, если постоянная радиоактивного распада $\lambda = 300\ \text{с}^{-1}$. ***Ответ***: $T = 2{,}31$ мс.

4.62. Определите время t, за которое распадается 70 % радиоактивного тория ($^{234}_{90}Th$), если его период полураспада $T = 24,1$ сут. ***Ответ***: $t = 41,9$ сут.

4.63. Определите долю нераспавшихся ядер за время t, равное трем средним временам жизни τ радиоактивного ядра. ***Ответ***: $N/N_0 = 0,05$.

4.64. Определите долю распавшихся ядер за время $t = T/2$ (T — период полураспада ядра). ***Ответ***: $\Delta N/N_0 = 0,293$.

4.65. Начальная масса m_0 радиоактивного изотопа натрия $^{25}_{11}Na$ равна 0,4 мг. Определите начальную активность A_0 изотопа, если его период полураспада $T = 62$ см. ***Ответ***: $A_0 = 1,17 \cdot 10^{17}$ Бк.

4.66. Определите активность A радиоактивного изотопа через $t = 5$ мин, если его начальная активность $A_0 = 8,78 \cdot 10^{16}$ Бк, а период полураспада $T = 62$ с. ***Ответ***: $A = 3,07 \cdot 10^{15}$ Бк.

4.67. Начальная активность 0,3 мг изотопа натрия $^{25}_{11}Na$ равна $8,78 \cdot 10^{16}$ Бк. Определите период полураспада T этого изотопа. ***Ответ***: $T = 62$ с.

4.68. Определите период полураспада T некоторого радиоактивного изотопа, если его активность за время $t = 5$ мин уменьшилась в три раза. ***Ответ***: $T = 189$ с.

4.69. Зная постоянную Авогадро, определите массу m нейтрального атома углерода $_6C$. ***Ответ***: $m = 1,99 \cdot 10^{-26}$ кг.

4.70. Определите число протонов Z и нейтронов N, входящих в состав ядер трех изотопов кислорода: 1) $^{16}_{8}O$; 2) $^{17}_{8}O$; 3) $^{18}_{8}O$. ***Ответ***: 1) $Z = 8$, $N = 8$; 2) $Z = 8$, $N = 9$; 3) $Z = 8$, $N = 10$.

4.71. Определите, сколько нуклонов A, протонов Z и нейтронов N содержат ядра: 1) $^{23}_{11}Na$; 2) $^{95}_{38}Sr$; 3) $^{139}_{57}La$.

4.72. Определите, пользуясь таблицей Менделеева, число N нейтронов и число протонов Z в атомах: 1) молибдена; 2) вольфрама.

4.73. Определите, какие из приведенных ниже ядер являются: 1) изотопами; 2) изобарами: $^{1}_{1}H$; $^{2}_{1}H$; $^{3}_{1}H$; $^{24}_{12}Mg$; $^{25}_{12}Mg$; $^{40}_{19}K$; $^{40}_{20}Ca$; $^{10}_{5}B$; $^{11}_{5}B$.

4.74. Определите зарядовые числа, массовые числа и символы ядер, если в ядрах $^{17}_{8}O$; $^{23}_{11}Na$; $^{52}_{24}Cr$ протоны заменить нейтронами, а нейтроны — протонами.

4.75. Определите массу изотопа $^{15}_{7}N$, если дефект массы при образовании ядра $^{15}_{7}N$ равен $0,2058 \cdot 10^{-27}$ кг. Массу атома водорода принять равной $1,6736 \cdot 10^{-27}$ кг; массу нейтрона — $1,675 \cdot 10^{-27}$ кг. ***Ответ***: $m_{^{15}_{7}N} = 2,4909 \cdot 10^{-26}$ кг.

4.76. Определите энергию связи $E_{св}$ ядра атома гелия $^{4}_{2}He$. Массу нейтрального атома гелия принять равной $6,6467 \cdot 10^{-27}$ кг, массу атома водорода $m_H = 1,6736 \cdot 10^{-27}$ кг, массу нейтрона $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}$ кг. ***Ответ***: $E_{св} = 28,4$ МэВ.

4.77. Определите энергию связи $E_{св}$ атома кислорода $^{16}_{8}O$, если масса его нейтрального атома $m = 2,6552 \cdot 10^{-26}$ кг. ***Ответ***: $E_{св} = 133$ МэВ.

4.78. Определите удельную энергию связи $\delta E_{св}$ ядра $^{7}_{3}Li$, если для него энергия связи $E_{св} = 39,3$ МэВ. ***Ответ***: $\delta E_{св} = 5,61$ МэВ/нуклон.

4.79. Запишите α-распад радия $^{226}_{88}Ra$.

4.80. Определите, в какой элемент превращается $^{234}_{90}Th$ после α-распада.

4.81. Запишите β-распад таллия $^{210}_{81}Tl$.

4.82. Определите, во что превращается изотоп $^{238}_{92}U$ после α-распада и двух β-распадов.

4.83. В какой элемент превращается радон $^{226}_{86}Rn$ после β-распада?

4.84. Определите, во что превращается изотоп $^{234}_{90}Th$, ядра которого претерпевают три последовательных α-распада. ***Ответ***: $^{222}_{80}Hg$.

4.85. Ядра радиоактивного изотопа тория $^{232}_{90}Th$ претерпевают последовательно α-распад, два β-распада и α-распад. Определите конечный продукт распада. ***Ответ***: $^{224}_{88}Ra$.

4.86. Определите, пользуясь таблицей Менделеева, в какой элемент превратится элемент урана $^{238}_{92}U$ в результате трех α-распадов и двух β-распадов. ***Ответ***: $^{226}_{88}Ra$.

4.87. Радиоактивный изотоп $^{210}_{81}Tl$ претерпевает последовательно три β-распада и один α-распад. Определите для конечного ядра зарядовое число Z, массовое число A. ***Ответ***: $Z = 82$; $A = 206$.

4.88. Запишите первую в истории искусственную ядерную реакцию, осуществленную при бомбардировке азота $^{14}_{7}N$ α-частицами и сопровождающуюся выбиванием протона.

4.89. Определите зарядовое число и массовое число частицы, обозначенной буквой x в символической записи ядерной реакции: 1) $^{6}_{3}Li + x \rightarrow {}^{3}_{1}H + {}^{4}_{2}He$; 2) $^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{30}_{14}Si + x$; 3) $^{9}_{4}Be + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{12}_{6}C + x$.

4.90. Запишите недостающие обозначения x в следующих ядерных реакциях: 1) $x + {}^{1}_{1}p \rightarrow {}^{22}_{11}Na + {}^{4}_{2}He$; 2) $^{40}_{18}Ar + {}^{4}_{2}He \rightarrow x + {}^{1}_{0}n$; 3) $^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}He \rightarrow x + {}^{1}_{1}p$. ***Ответ***: 1) $^{25}_{12}Mg$; 2) $^{43}_{20}Ca$; 3) $^{30}_{14}Si$.

4.91. В ядерной реакции $^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{3}_{2}He + {}^{1}_{0}n$ выделяется энергия $\Delta E = 3,27$ МэВ. определите массу атома $^{3}_{2}He$, если масса $^{2}_{1}H$ равна $3,3461 \cdot 10^{-27}$ кг, а масса нейтрона $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}$ кг. ***Ответ***: $m_{^{3}_{2}He} = 5,0084 \cdot 10^{-27}$ кг.

4.92. Определите энергию Q ядерной реакции $^{14}_{7}N + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{14}_{6}C + ^{1}_{1}p$, если энергия связи ядра $^{14}_{7}N$ равна 104,66 МэВ, а ядра $^{14}_{6}C$ — 105,29 МэВ. ***Ответ***: $Q = -0,63$ МэВ.

4.93. Ядро урана $^{238}_{92}U$, захватывая нейтрон, превращается в радиоактивный изотоп урана, который претерпевает β-распад, дочернее ядро которого также β-радиоактивно. Запишите указанные процессы, если конечным продуктом является ядро плутония.

4.94. При захвате нейтрона ядром урана $^{235}_{92}U$ образуются два осколка деления и два нейтрона. Определите порядковый номер Z и массовое число A одного из осколков, если второй осколок — ядро стронция $^{95}_{38}Sr$. ***Ответ***: $Z = 54$; $A = 139$.

4.95. При захвате нейтрона ядром урана $^{235}_{92}U$ образуются два осколка деления и три нейтрона. Определите ядро второго осколка, если первый — $^{148}_{57}La$.

4.96. Определите в электронвольтах энергию E, которую возможно получить при расщеплении 1 г урана $^{235}_{92}U$, если при расщеплении каждого ядра урана выделяется энергия 200 МэВ. ***Ответ***: $E = 5,12 \cdot 10^{23}$ МэВ.

4.97. Ядро железа $^{56}_{26}Fe$, захватывая нейтрон, превращается в β-радиоактивный изотоп марганца с массовым числом $A = 56$, который впоследствии претерпевает β-распад. Запишите рассмотренные процессы.

4.98. В результате реакции синтеза при взаимодействии двух ядер дейтерия образуется тритий и еще одна частица. Что это за частица?

4.99. Запишите реакцию синтеза ядер дейтерия ($^{2}_{1}H$) и трития ($^{3}_{1}H$) в ядро гелия ($^{4}_{2}He$); определите энергию, выделяемую в результате этой реакции, если энергии связи ядер $E_{св\,^{2}_{1}H} = 2,2$ МэВ; $E_{св\,^{3}_{1}H} = 8,5$ МэВ; $E_{св\,^{4}_{2}He} = 28,3$ МэВ. ***Ответ:*** $\Delta E = 17,6$ МэВ.

4.100. В случае термоядерной реакции $^{2}_{1}H + ^{3}_{1}H \rightarrow ^{4}_{2}He + ^{1}_{0}n$ освобождается энергия $\Delta E = 17,6$ МэВ. Определите энергию, выделяемую при синтезе 1 г гелия. Сколько угля с удельной теплотой сгорания $q = 2,5 \cdot 10^{7}$ Дж/кг следовало бы сжечь для получения такой же энергии? ***Ответ***: $E = 4,24 \cdot 10^{11}$ Дж; $m_1 = 1,7 \cdot 10^{4}$ кг.

Глава 22

Элементы физики элементарных частиц

Примеры решения задач

1 Определите, какие из приведенных схем мюонных распадов возможны и почему:

1) $\mu^- \to {}_{-1}^{0}e + {}_{0}^{0}\tilde{\nu}_e$;

2) $\mu^- \to {}_{-1}^{0}e + {}_{0}^{0}\tilde{\nu}_e$;

3) $\mu^- \to {}_{-1}^{0}e + {}_{0}^{0}\tilde{\nu}_e + {}_{0}^{0}\tilde{\nu}_\mu$.

Решение. 1) $\mu^- \to {}_{-1}^{0}e + {}_{0}^{0}\tilde{\nu}_e$.

Для μ^--мюона лептонное число $L = 1$, для электрона $L = 1$; для ${}_{0}^{0}\tilde{\nu}_e$ лептонное число $L = -1$. Лептонное число в приведенном распаде не сохраняется $(1 \neq 1 - 1)$, поэтому такой распад невозможен.

2) $\mu^- \to {}_{-1}^{0}e + {}_{0}^{0}\tilde{\nu}_e$.

Для μ^--мюона лептонное число $L = 1$, для электрона $L = 1$; для ${}_{0}^{0}\tilde{\nu}_e$ лептонное число $L = 1$. В приведенном распаде лептонное число не сохраняется $(1 \neq 1 + 1)$, поэтому такой распад невозможен.

Отметим, что в приведенных схемах мюонного распада 1) и 2) также не выполняется закон сохранения спина. [Каждая из записанных частиц имеет спин 1/2 (в единицах $\hbar$)].

3) $\mu^- \to {}_{-1}^{0}e + {}_{0}^{0}\tilde{\nu}_e + {}_{0}^{0}\tilde{\nu}_\mu$.

Для μ^--мюона лептонное число $L = 1$, для электрона $L = 1$; для электронного антинейтрино ${}_{0}^{0}\tilde{\nu}_e$ лептонное число $L = -1$, для мюонного нейтрино ${}_{0}^{0}\tilde{\nu}_\mu$ $L = 1$. В приведенном распаде лептонное число сохраняется $(1 = 1 + 1 - 1)$, поэтому такой распад возможен и в силу сохранения спина, причем следует учесть, что спины у нейтрино и антинейтрино противоположны.

Ответ: $\mu^- \to {}_{-1}^{0}e + {}_{0}^{0}\tilde{\nu}_e + {}_{0}^{0}\tilde{\nu}_\mu$.

Задачи для самостоятельного решения

4.101. Запишите схемы распадов отрицательных μ-мюона и τ-лептона.

4.102. При захвате протоном отрицательного мюона образуется нейтрон и еще одна частица. Записав реакцию, определите эту частицу.

4.103. В приведенных реакциях напишите недостающий x, выбрав одно из нейтрино (антинейтрино): ν_e, $\tilde{\nu}_e$, ν_μ, $\tilde{\nu}_\mu$:

1) ${}_0^1n + x \to {}_1^1p + \mu^-$; 2) ${}_1^1p + x \to {}_0^1n + {}_{+1}^{\ 0}e$; 3) ${}_0^1n + x \to {}_1^1p + {}_{-1}^{\ 0}e$.

4.104. Запишите схему распада нейтрона, доказав выполнение закона сохранения лептонного числа.

4.105. Пользуясь таблицей элементарных частиц, определите, какие из приведенных схем распадов разрешены законом сохранения лептонного числа:

1) $K^+ \to {}_{+1}^{\ 0}e + \pi^0 + {}_0^0\nu_e$;

2) ${}_1^1p \to {}_0^1n + {}_{+1}^{\ 0}e + {}_0^0\nu_e$;

3) $\pi^+ \to \mu^+ + {}_{-1}^{\ 0}e + {}_{+1}^{\ 0}e$.

4.106. Ниже приведены запрещенные схемы распадов. Пользуясь таблицей элементарных частиц, определите для каждого из них законы сохранения, которые нарушаются: 1) $K + {}_0^1n \to \Omega^- + K^+ + K^0$; 2) $\pi^- \to \mu^- + {}_0^0\nu_\mu$.

4.107. Какая характеристика элементарных частиц положена в основу деления адронов на мезоны и барионы?

4.108. Определите, выполняется ли при распаде ${}_1^1p + \pi^- \to K^+ + K^-$ закон сохранения барионного числа.

Приложения

П1. Основные единицы СИ

Метр (м) — длина пути, проходимого светом в вакууме за 1/299 792 458 с.

Килограмм (кг) — масса, равная массе международного прототипа килограмма (платиноиридиевого цилиндра, хранящегося в Международном бюро мер и весов в Севре, близ Парижа).

Секунда (с) — время, равное 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

Ампер (А) — сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, создает между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Кельвин (К) — 1/273,16 термодинамической температуры тройной точки воды.

Моль (моль) — количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в нуклиде ^{12}С массой 0,012 кг.

Кандела (кд) — сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет $\frac{1}{683}$ Вт/ср.

П2. Дополнительные единицы СИ

Радиан (рад) — угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

Стерадиан (ср) — телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающей на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

П3. Производные единицы физических величин

Наименование величины	Определяющее уравнение	Единица измерения: Обозначение	Единица измерения: Наименование и определение
Единицы геометрических и механических величин			
Площадь	$S = l^2$	$м^2$	*Квадратный метр* равен площади квадрата со сторонами, длины которых равны 1 м
Объем	$V = l^3$	$м^3$	*Кубический метр* равен объему куба с ребрами, длины которых равны 1 м
Скорость	$\upsilon = \frac{s}{t}$	м/с	*Метр в секунду* равен скорости равномерного и прямолинейного движения, при котором точка за 1 с перемещается на расстояние 1 м
Ускорение	$a = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$	$м/с^2$	*Метр на секунду в квадрате* равен ускорению прямолинейного ускоренного движения точки, при котором за 1 с скорость точки изменяется на 1 м/с
Угловая скорость	$\omega = \frac{\varphi}{t}$	рад/с	*Радиан в секунду* равен угловой скорости равномерного вращающего тела, все точки которого за 1 с поворачиваются на угол 1 рад
Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$	$рад/с^2$	*Радиан на секунду в квадрате* равен угловому ускорению равноускоренно вращающегося тела, при котором оно за 1 с изменяет угловую скорость на 1 рад/с
Частота периодического процесса	$\nu = \frac{1}{T}$	Гц	*Герц* равен частоте периодического процесса, при которой за 1 с совершается один цикл процесса

Наименование величины	Определяющее уравнение	Единица измерения	
		Обозначение	Наименование и определение
Плотность	$\rho = \frac{m}{V}$	кг/м^3	*Килограмм на кубический метр* равен плотности однородного вещества, масса которого при объеме 1 м^3 равна 1 кг
Сила	$F = ma$	Н	*Ньютон* равен силе, сообщающей телу массой 1 кг ускорение 1 м/с^2 в направлении действия силы: 1 Н = 1 кг·м/с^2
Импульс	$p = mv$	кг·м/с	*Килограмм-метр на секунду* равен импульсу материальной точки массой 1 кг, движущейся со скоростью 1 м/с
Давление	$p = \frac{F}{S}$	Па	*Паскаль* равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м^2: 1 Па = 1 Н/м^2
Работа, энергия	$A = Fs$	Дж	*Джоуль* равен работе, совершаемой силой 1 Н на пути 1 м: 1 Дж = 1 Н·м
Мощность	$N = \frac{A}{t}$	Вт	*Ватт* равен мощности, при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж: 1 Вт = 1 Дж/с
Момент инерции	$J = mr^2$	кг·м^2	*Килограмм-метр в квадрате* равен моменту инерции материальной точки массой 1 кг, находящейся от оси вращения на расстоянии 1 м

Наименование величины	Определяющее уравнение	Единица измерения	
		Обозначение	Наименование и определение
Момент силы	$M = Fl$	Н·м	***Ньютон-метр*** **равен моменту силы, равной 1 Н, относительно точки, расположенной на расстоянии 1 м от линии действия силы**
Момент импульса	$L = mvr$	кг·м^2/с	***Килограмм-метр в квадрате на секунду*** **равен моменту импульса материальной точки, движущейся по окружности радиусом 1 м и имеющей импульс 1 кг·м/с**
Единицы тепловых величин			
Количество теплоты, внутренняя энергия	Q	Дж	***Джоуль*** **равен количеству теплоты, эквивалентному работе 1 Дж**
Тепловой поток (тепловая мощность)	Φ	Вт	***Ватт*** **равен тепловому потоку, эквивалентному механической мощности 1 Вт**
Теплоемкость системы	$C = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$	Дж/К	***Джоуль на кельвин*** **равен теплоемкости системы, температура которой повышается на 1 К при подведении к системе количества теплоты 1 Дж**
Удельная теплоемкость	$c = \dfrac{\Delta Q}{m\Delta t}$	$\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$	***Джоуль на килограмм-кельвин*** **равен удельной теплоемкости вещества, имеющего при массе 1 кг теплоемкость 1 Дж/К**
Молярная теплоемкость	$C_m = \dfrac{\Delta Q}{\nu\Delta t}$	$\dfrac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$	***Джоуль на моль-кельвин*** **равен молярной теплоемкости вещества, имеющего при количестве вещества 1 моль теплоемкость 1 Дж/К**

Наименование величины	Определяющее уравнение	Единица измерения	
		Обозначение	Наименование и определение
Единицы электрических и магнитных величин			
Электрический заряд (количество электричества)	$Q = It$	Кл	*Кулон* равен электрическому заряду, проходящему сквозь поперечное сечение проводника при силе постоянного тока 1 А за время 1 с
Объемная плотность электрического заряда	$\rho = \frac{Q}{V}$	Кл/м^3	*Кулон на кубический метр* равен объемной плотности электрического заряда, при которой в объеме 1 м^3 равномерно распределен заряд 1 Кл
Поверхностная плотность электрического заряда	$\sigma = \frac{Q}{S}$	Кл/м^2	*Кулон на квадратный метр* равен поверхностной плотности электрического заряда, при которой заряд, равномерно распределенный по поверхности площадью 1 м^2, равен 1 Кл
Линейная плотность электрического заряда	$\tau = \frac{Q}{l}$	Кл/м	*Кулон на метр* равен линейной плотности электрического заряда, при которой заряд, равномерно распределенный по нити длиной 1 м, равен 1 Кл
Напряженность электрического поля	$E = \frac{F}{Q_0}$	$\frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}}$	*Ньютон на кулон* равен напряженности электрического поля в точке поля, в которой на точечный электрический заряд 1 Кл поле действует с силой 1 Н. *Вольт на метр* равен напряженности однородного электрического поля, создаваемого разностью потенциалов 1 В между точками, находящимися на расстоянии 1 м на линии напряженности поля

Наименование величины	Определяющее уравнение	Единица измерения	
		Обозначение	Наименование и определение
Электрический потенциал	$\varphi = \frac{A}{Q_0}$	В	*Вольт* равен потенциалу такой точки поля, в которой заряд 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж: $1\ В = 1\ Дж/Кл$
Электрическая емкость	$C = \frac{Q}{\varphi}$	Ф	*Фарад* равен электрической емкости такого уединенного проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл
Плотность электрического тока	$j = \frac{I}{S}$	$А/м^2$	*Ампер на квадратный метр* равен плотности электрического тока, при которой сила тока, равномерно распределенного по поперечному сечению проводника площадью 1 $м^2$, равна 1 А
Электрическое сопротивление	$R = \frac{U}{I}$	Ом	*Ом* равен сопротивлению такого проводника, в котором при напряжении 1 В течет постоянный ток 1 А
Электрическая проводимость	$G = \frac{1}{R}$	См	*Сименс* равен проводимости участка электрической цепи сопротивлением 1 Ом
Удельное электрическое сопротивление	$\rho = \frac{RS}{l}$	Ом · м	*Ом-метр* равен удельному электрическому сопротивлению проводника площадью поперечного сечения 1 $м^2$ и длиной 1 м, имеющего сопротивление 1 Ом
Удельная электрическая проводимость	$\sigma = \frac{1}{\rho}$	См/м	*Сименс на метр* равен удельной электрической проводимости проводника, который при площади поперечного сечения 1 $м^2$ и длине 1 м имеет электрическую проводимость 1 См

Наименование величины	Определяющее уравнение	Единица измерения	
		Обозначение	Наименование и определение
Магнитная индукция	$B = \frac{F}{Il}$	Тл	*Тесла* равен магнитной индукции такого однородного магнитного поля, которое действует с силой 1 Н на каждый метр длины проводника, расположенного перпендикулярно направлению поля, если по этому проводнику проходит ток 1 А: $1\ Тл = 1\ Н/(А \cdot м)$
Магнитный поток	$\Phi = BS$	Вб	*Вебер* равен магнитному потоку, проходящему сквозь плоскую поверхность площадью 1 $м^2$, расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 1 Тл: $1\ Вб = 1\ Тл \cdot м^2$
Напряженность магнитного поля	$H = \frac{B}{\mu_0}$	А/м	*Ампер на метр* равен напряженности такого поля, магнитная индукция которого в вакууме равна $4\pi \cdot 10^{-7}$ Тл
Магнитный момент контура с током	$P = IS$	$А \cdot м^2$	*Ампер-квадратный метр* равен моменту контура площадью 1 $м^2$, если по нему течет ток 1 А
Индуктивность	$L = \frac{\Phi}{I}$	Гн	*Генри* равен индуктивности такого контура, магнитный поток которого при токе 1 А равен 1 Вб: $1\ Гн = 1\ Вб/А$
Намагниченность	$J = \frac{P}{V}$	А/м	*Ампер на метр* равен намагниченности, при которой вещество объемом 1 $м^3$ имеет магнитный момент 1 $А \cdot м^2$

Наименование величины	Определяющее уравнение	Единица измерения	
		Обозначение	Наименование и определение
Поток излучения	$\Phi = \frac{\Delta W}{\Delta t}$	Вт	*Ватт* равен энергии 1 Дж, переносимой волной за 1 с
Поверхностная плотность потока излучения	$I = \frac{\Phi}{S}$	Вт/м^2	*Ватт на квадратный метр* равен энергии 1 Дж, переносимой волной за 1 с через площадку поверхности площадью 1 м^2
Единицы оптических величин			
Оптическая сила линзы	$\Phi = \frac{1}{f}$	дптр	*Диоптрия* — оптическая сила линзы с фокусным расстоянием 1 м
Световой поток	$E = \frac{\Phi}{S}$	лк	*Люкс* — освещенность поверхности, на 1 м^2 которой падает световой поток в 1 лм
Освещенность	Ф	лм	*Люмен* — световой поток, испускаемый точечным источником света в 1 кд внутри телесного угла в 1 ср
Единицы радиоактивных излучений			
Поглощенная доза излучения	—	Гр	*Грей* — доза излучения, при которой облученному веществу массой 1 кг передается энергия ионизирующего излучения 1 Дж
Экспозиционная доза излучения	—	Кл/кг или Р	*Кулон на килограмм* — доза, при которой в сухом атмосферном воздухе массой 1 кг создаются ионы, несущие заряд каждого знака в 1 Кл: $1\ \text{Р} = 2{,}58 \cdot 10^{-4}$ Кл/кг
Биологическая доза излучения	—	Бэр	*Бэр* — доза любого ионизирующего излучения, производящая такое же биологическое действие, что и доза рентгеновского или γ-излучения в 1Р

П4. Основные физические постоянные

Скорость света в вакууме	$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
Нормальное ускорение	$g = 9{,}81$ м/с^2
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2)
Постоянная Авогадро	$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Молярная газовая постоянная	$R = 8{,}31$ Дж/(К·моль)
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Элементарный заряд	$e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг
Удельный заряд электрона	$e/m_e = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Постоянная Стефана — Больцмана	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)
Постоянная Вина	$b = 2{,}90 \cdot 10^{-3}$ м·К
Постоянная Планка	$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Ридберга	$R = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ $R' = 1{,}1 \cdot 10^7$ м$^{-1}$
Первый боровский радиус	$a_0 = 5{,}28 \cdot 10^{-11}$ м
Комптоновская длина волны	$\lambda_C = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Масса изотопа $^1_1$H	$m_H = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг

П5. Десятичные приставки к названиям единиц

Т — тера (10^{12})	м — милли (10^{-3})
Г — гига (10^9)	мк — микро (10^{-6})
М — мега (10^6)	н — нано (10^{-9})
к — кило (10^3)	п — пико (10^{-12})
д — деци (10^{-1})	ф — фемто (10^{-15})
с — санти (10^{-2})	а — атто (10^{-18})

П6. Некоторые внесистемные величины

1 сут = 86 400 с

1 год = 365,25 сут = $3,16 \cdot 10^7$ с

$1^\circ = 1,75 \cdot 10^{-2}$ рад

$1' = 1,91 \cdot 10^{-4}$ рад

$1'' = 4,85 \cdot 10^{-6}$ рад

1 мм рт. ст. = 133,3 Па

1 эВ = $1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж

П7. Астрономические величины

Радиус Земли $6,37 \cdot 10^6$ м

Масса Земли $5,98 \cdot 10^{24}$ кг

Радиус Солнца $6,95 \cdot 10^8$ м

Масса Солнца $1,98 \cdot 10^{30}$ м

Радиус Луны $1,74 \cdot 10^6$ м

Масса Луны $7,33 \cdot 10^{22}$ кг

Расстояние от центра Земли до центра Солнца $1,49 \cdot 10^{11}$ м

Расстояние от центра Земли до центра Луны $3,84 \cdot 10^8$ м

П8. Греческий алфавит

A, α — альфа

B, β — бета

Γ, γ — гамма

Δ, δ — дельта

E, ε — эпсилон

Z, ζ — дзэта

H, η — эта

Θ, θ, ϑ — тэта

I, ι — йота

K, $\varkappa$ — каппа

Λ, λ — ламбда

M, μ — мю

N, ν — ню

Ξ, ξ — кси

O, o — омикрон

Π, π — пи

P, ρ — ро

Σ, σ — сигма

T, τ — тау

Υ, υ — ипсилон

Φ, φ — фи

X, χ — хи

Ψ, ψ — пси

Ω, ω — омега